UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARÍA ACADÉMICA

COORDINACIÓN DE POSGRADO

MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO

“Secuencia de enseñanza de los números decimales basada en un diagnóstico de las dificultades de comprensión de estos números”.

Tesis que para obtener el Grado de:

Maestra en Desarrollo Educativo

Presenta

Evelyn Valencia Mora

Dra. Alicia Ávila Storer

México, D.F. Octubre 2014

Agradecimientos

- A Dios porque ha puesto en mi camino todo lo que necesito para lograr mis objetivos.

- A mis padres y hermanos porque han estado conmigo en todo momento, por su apoyo y los ánimos que me han infundido.

- A mi asesora Alicia Ávila, parte fundamental en la elaboración de esta tesis, por su acompañamiento, tiempo dedicado, orientaciones y sugerencias.

- A Rodrigo Cambray por sus asesorías en momentos precisos de la investigación, sus comentarios y observaciones que contribuyeron a mejorar la calidad de este trabajo.

- A Salvador Llinares y Julia Vals, quienes me recibieron tan amablemente en su país y me brindaron la oportunidad de nuevas experiencias, por el tiempo dedicado a la revisión de mi trabajo, sus aportaciones y sugerencias, las cuales contribuyeron a la conclusión de la presente tesis.

- A mis lectores, Alicia Carvajal, José Luis Cortina, Rodrigo Cambray y Armando Solares, por sus valiosas contribuciones.

- A Ricardo, por permitirme entrar a la privacidad de su aula para trabajar con sus alumnos las actividades aquí reportadas, cediéndome tiempo valioso y siguiendo de cerca esta investigación.

- A mis compañeros Erika, Miriam, Nydia, Zoraida, Belén, Tisbe, Mario y Juan Manuel, quienes con su amistad, compañerismo y alegría hicieron más ameno este proceso, porque encontré en ustedes verdaderos e invaluables amigos.

ÍNDICE

Introducción

INTRODUCCIÓN

Se sabe que en los últimos años, las autoridades educativas mexicanas han mostrado cierta preocupación por la mejora en el nivel de conocimientos de los estudiantes de educación básica, principalmente en las áreas de español y matemáticas. Estos conocimientos son evaluados de forma estandarizada a través de diversos instrumentos como lo son los exámenes PISA[1], ENLACE[2] y EXCALE[3], en los cuales, los resultados obtenidos por nuestros estudiantes no son del todo alentadores al ser mayoría los estudiantes que no logran resolver satisfactoriamente situaciones problemáticas. Como parte de las soluciones a dicha problemática se han modificado los planes y programas de estudio, los libros de texto e implementado nuevos materiales tanto impresos como digitales. Sin embargo, consideramos que la problemática va más allá de la realización de cambios en el currículo.

El campo de las matemáticas es sumamente amplio al involucrar diversas áreas como lo son la aritmética, geometría, estadística, probabilidad, entre otras, por lo que sería ambicioso pretender que los

[1] Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (por sus siglas en inglés: Programme for International Student Assessment)
[2] Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares.
[3] Exámenes de la Calidad y el Logro Educativos

estudiantes mejoren en todos estos ámbitos de un momento a otro. Es por ello que para el desarrollo de esta investigación nos centramos en sólo un contenido que en los programas de estudio, en los libros de texto y en las aulas en general no se ha reconocido como importante o necesario, y que incluso ha llegado a ser considerado por los profesores como uno de los temas más fáciles de enseñar y por tanto, uno de los que representan menor problemática para los estudiantes, nos referimos a los números decimales. Desafortunadamente pocas veces se reconoce que la comprensión de las propiedades de estos números son la base para que los estudiantes posteriormente puedan acceder a otro tipo de conocimientos de mayor complejidad cognitiva en niveles educativos superiores, como lo es la comprensión de los números racionales e irracionales por ejemplo. Por lo anterior, es recomendable trabajarlos desde los últimos grados de la educación primaria, para favorecer que los estudiantes adquieran conocimientos matemáticos más sólidos.

Esta tesis, es resultado del desarrollo de una investigación sobre las concepciones acerca de los números decimales que tienen estudiantes de sexto grado de primaria, mismas que se pusieron en evidencia a través de las actividades propuestas con el experimento de enseñanza diseñado con el objetivo de evidenciar dichas concepciones, ponerlas en acción y hacerlas avanzar hacia una comprensión más amplia de los números decimales. La información obtenida de dicha investigación se organizó en nueve capítulos agrupados en dos grandes apartados que se describen a continuación.

El primero, denominado “Planteamiento de la investigación” está integrado por tres capítulos. El primero de ellos presenta la problemática de investigación, la cual relacionada con los números decimales, su aprendizaje y su enseñanza, dichos números se abordan desde el punto de vista de su definición y de su representación, retomando para ello los conceptos obtenidos en diversas investigaciones con el fin de caracterizarlos. Así mismo se muestra la forma en que estos números son incluidos en el programa de estudios de la educación básica, ya que refleja lo que nuestro Sistema Educativo espera que los estudiantes conozcan sobre los números decimales. Además, se hace un recuento de la forma en que pruebas como ENLACE y EXCALE evalúan dicho contenido, destacando el tipo de preguntas que en éstas se formulan y los porcentajes de aciertos que obtienen nuestros estudiantes. Estos resultados ratifican la necesidad de abordarlos desde otras perspectivas que contribuyan a ampliar su comprensión.

En este mismo capítulo se incluye un recuento de las dificultades reportadas en otras investigaciones sobre el mismo tema. Esta información en conjunto con los datos anteriormente mencionados, sirvieron como parámetros que orientaron el diseño de las actividades que constituyeron el experimento de enseñanza presentado en posteriores capítulos y ayudaron a la delimitación del objetivo de investigación que aquí se menciona.

En el segundo capítulo se presenta el marco teórico que sustentó nuestra investigación, siendo las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA) (Simon, 1995 citado en Simon & Tzur, 2004), las que nos permitieron identificar el camino que consideramos siguen los estudiantes en la comprensión de los números decimales. Por lo tanto, en este capítulo se definen lo que son las THA, la forma en que éstas se construyen y los elementos que las integran, para concluir en la presentación de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para los números decimales que se diseñó para la presente investigación y la formulación de las preguntas que la orientaron.

El tercer capítulo incluye la descripción del experimento de enseñanza diseñado a partir de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para los números decimales, el cual está organizado en once sesiones. Dos de estas sesiones corresponden a la aplicación de los cuestionarios inicial y final, y nueve sesiones al trabajo con las distintas propiedades de los decimales. Estas últimas se organizan en siete ámbitos que son: 1.- Comprensión de las escrituras con punto, 2.- Relación de los decimales con la unidad, 3.- Equivalencia entre distintos órdenes de la parte fraccionaria de los números decimales, 4.- Comparación y orden entre decimales, 5.- Representaciones de los decimales, 6.- Introducción a la propiedad de densidad y 7.- Cálculo y operaciones. Se presenta la descripción de las nueve sesiones, las cuales incluyen las actividades que se presentaron a los estudiantes, el objetivo de cada actividad y los materiales que se utilizaron.

Se presentan también los datos recabados en las distintas etapas de la investigación y una descripción de la forma en que se realizó el análisis de los mismos.

La segunda parte nombrada “Resultados y conclusiones” abarca del cuarto al noveno capítulo y presenta el análisis de los datos recopilados durante la investigación, mostrando las actividades propuestas a los estudiantes y las formas en que éstos las resolvieron, se destacan aquellos razonamientos que son muestra del avance que se dio en la comprensión de las diversas propiedades de los números decimales, las dificultades a las que se enfrentaron los alumnos, las ideas que generaron confusión y la forma en que estas confusiones se disiparon. Al finalizar el análisis de las actividades trabajadas para cada uno de los siete ámbitos de los decimales que se abordaron, se sintetizan los momentos que fueron significativos en el proceso de comprensión de estos números y posteriormente las dificultades que persistieron aún después de trabajar las actividades diseñadas.

Por la extensión de los resultados obtenidos después del análisis de los datos, éstos se presentan a lo largo de cinco capítulos de la siguiente forma:

En el capítulo cuatro se encuentran los resultados de las sesiones correspondientes a la Comprensión de las escrituras con punto y a relación de los decimales con la unidad.

El capítulo cinco incluye los resultados relacionados con la equivalencia entre distintos órdenes de la parte fraccionaria de los números decimales y la comparación y orden de los decimales.

El capítulo seis muestra los resultados de las sesiones cuyo objetivo era trabajar el reconocimiento de las distintas representaciones de los decimales.

En el capítulo siete se reportan los resultados de la sesión dedicada a la introducción a la noción de densidad a través de la ubicación de los decimales como puntos en la recta.

El capítulo ocho contiene los resultados de las sesiones dedicadas al trabajo con el cálculo y las operaciones a través de la resolución de problemas y la promoción del rompimiento de la idea de que la multiplicación siempre agranda y la división siempre achica.

Finalmente, en el capítulo nueve se hace el recuento de los principales resultados obtenidos, se destacan las actividades e instrumentos utilizados que favorecieron en los estudiantes el avance en sus niveles de comprensión sobre los números decimales y algunas recomendaciones de aspectos que consideramos es importante retomar al enseñar dichos números.

Primera parte:

Planteamiento de la Investigación

Capítulo 1.

Problemática De Investigación

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN

En la vida cotidiana hacemos uso de muchos conocimientos matemáticos, algunos son muy evidentes y fáciles de reconocer, como el uso de las operaciones básicas que empleamos al hacer todo tipo de compras; otros no son identificados tan fácilmente pero son igualmente útiles, como la medición, la ubicación espacial o la proporcionalidad.

En este caso estudiaremos la comprensión que los estudiantes de sexto grado tienen sobre los números decimales, números que en la escuela no han sido considerados como importantes, ni se les han reconocido las características que los identifican como únicos, sino que con frecuencia son vistos por docentes y alumnos como una extensión de los números naturales, con los que todos tenemos contacto desde pequeños (Ávila, 2008b), siendo que poseen “propiedades topológicas y algebraicas” propias (Brousseau, Brousseau y Warfiel, 2007 citado en Konic, Godino y Rivas, 2010).

Ahora bien, si nos propusiéramos enumerar las situaciones cotidianas en las que utilizamos los decimales, nos daríamos cuenta que hay gran variedad de ellas en las que se pone de manifiesto la importancia de dichos números. Por ejemplo, para observar en qué aspectos de la vida cotidiana están inmersos los números decimales, bastaría observar una portada de periódico, en la que se manejan frases como:

> "*Caen 2.9% exportaciones en febrero; primer descenso anual desde la crisis de 2009: Inegi*"[4]
>
> *"Se quedarán sin suministro de agua 2.5 millones en el Edomex durante 4 días"*[5]
>
> *"En 2012 el gobierno invirtió en ciencia 0.28% del PIB"*[6]

Los anteriores encabezados muestran que los números decimales se utilizan en diversos ámbitos y que tienen una relevancia especial al expresar cantidades que contienen una parte que es menor a la unidad, por ejemplo, en el primer y el tercer encabezados no se especifica una unidad utilizada, pero ésta se sobreentiende, dichos números indican cantidades que no pueden ser expresadas con los números naturales, como lo son el 2.9% y el 0.28%;en el segundo encabezado se está tomando como unidad al millón, y se indica que 2 millones y otra mitad del millón de personas carecerán de agua. En aplicaciones prácticas de este tipo radica la relevancia de abordar como tema de esta investigación, la comprensión de los números decimales en alumnos de sexto grado de Educación Primaria.

Con lo anterior, identificamos que los números decimales nos permiten expresar cantidades para las cuales no es suficiente el uso de los números naturales; por ejemplo, para expresar medidas de cantidades menores que la unidad o más precisas que las que puedan obtenerse utilizando sólo ésta, también en proporciones (incluidos los porcentajes), al realizar conversiones de monedas, calcular costos, interpretar información de gráficas o tablas, periódicos, etc., son útiles los números decimales. La pregunta que cabría hacernos es si realmente en las escuelas de educación primaria se

[4] Tomado de http://www.jornada.unam.mx/2013/03/28/economia/025n1eco
[5] http://www.jornada.unam.mx/2013/03/28/estados/029n1est
[6] http://www.jornada.unam.mx/2013/03/28/ciencias/a02n2cie

reconocen todas estas aplicaciones prácticas de los decimales y si se hace un adecuado uso de dichos números.

En este capítulo describimos qué contenidos sobre los números decimales aparecen en el currículo de educación primaria mexicano, la forma en que se plantea sean abordados desde la escuela y cómo se introduce a los alumnos al aprendizaje de dichos números, se contrasta dicha información con los resultados que obtienen los estudiantes respecto a la comprensión y aplicación de dichos números en las pruebas de evaluación nacionales y con los resultados de investigaciones realizadas en torno al aprendizaje y enseñanza de los números decimales.

1.1. Los números decimales

A continuación presentamos un panorama general que pretende mostrar los ámbitos en que se encuentran inmersos los números decimales desde la perspectiva de su definición y de su representación.

1.1.1. ¿Qué es un número decimal?

En la literatura, y retomando investigaciones realizadas en torno a los números decimales, encontramos distintas definiciones de estos números:

- Los números decimales son un subconjunto de los números racionales con los que, a diferencia de los números naturales, se pueden expresar diferentes partes de la unidad, es decir, cantidades menores a ésta (Castro, 2001).
- Los números decimales, considerados como conjunto numérico, se identifican con expresiones del tipo "números con expresión decimal finita, exacta o que termina" (Sáiz, Gorostegui y Vilotta, 2011, p.135)

- *"Los números decimales pueden obtenerse por extensión de los números naturales* ***(N)*** *de las construcciones que pasan por la construcción de los números racionales, obteniendo los decimales* ***(D)*** *como una restricción de los racionales* ***(Q)****"* (Centeno, 1997: 65).

- *"Los números decimales se originan al prolongar el principio del valor relativo del sistema de numeración posicional de base diez en el sentido opuesto al de los números naturales… encierran el concepto de razón numérica que define a los números racionales…*". (Gómez, 2010: 98)

- Los números decimales son aquellos que pueden expresarse en forma de fracción con denominador en alguna potencia de 10, y tiene una representación como expresión decimal finita. "*Las únicas fracciones que se pueden expresar como decimales finitos son las que, escritas en su forma reducible, tienen sólo al 2 o al 5 como factores primos del denominador*" (Castro, 2001: 325) mismo que corresponde a una potencia de 10.

- *Las fracciones decimales son "un número racional cuyo denominador es una potencia entera de 10" (Peterson, 1996:256), por ejemplo ½, $\frac{3}{6}$ y $\frac{1}{1000}$. Dichos números siempre podrán ser expresados en una representación finita.*

- Los números decimales *"son números que tienen ciertas propiedades y funciones que los hacen distinguirse de otros…, pueden representarse en forma de fracción decimal"* (Ávila, 2008a: 27). *"Las fracciones decimales se expresan con un numerador entero y un denominador que es una potencia de diez…"* (Ávila, 2008a: 33)., estas fracciones se pueden representar utilizando escrituras que llevan punto decimal y que dan origen a expresiones decimales finitas" (Figura 1.1)

$$\tfrac{1}{2} = 0.5 \qquad \tfrac{3}{4} = 0.75 \qquad \tfrac{1}{4} = 0.25 \qquad {}^{2}/_{10} = 0.2$$

Figura 1.1 Ejemplos de números decimales y su representación finita con punto.

Comúnmente los alumnos y algunos docentes identifican a los decimales únicamente como aquellos números que en su escritura incluyen un punto que indica que hay una parte que es menor que la unidad. Dicha idea incluye solamente una de las características con las cuales se pueden identificar visualmente los números decimales, pero que no abarca la totalidad del concepto. Esto genera errores de orden conceptual que dan lugar a una incorrecta comprensión y utilización, pues no todos los números con punto pertenecen al conjunto de los decimales, al haber números como π que en su expresión con punto se representa como 3.141592653…, misma que a pesar de tener punto decimal, no corresponde al conjunto de los números decimales.

Para efectos de la presente investigación se considerará a los decimales como un subconjunto de los números racionales que tienen al menos una expresión en forma de fracción decimal con denominador potencia de 10 o en alguna de sus equivalentes como serían los múltiplos de 2 y 5.

1.2. Los números decimales en el currículo escolar

Realizando una revisión del Plan de Estudios 2011 de Educación Básica[7], observamos que "el mapa curricular de este nivel educativo se representa por espacios organizados en cuatro campos de formación" (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2011a: 40) que son:

[7] Que incluye la Educación Preescolar, Primaria y Secundaria.

- Lenguaje y comunicación.
- Pensamiento matemático.
- Exploración y comprensión del mundo natural y social.
- Desarrollo personal y para la convivencia.

En el campo de Pensamiento Matemático se indica que “en la educación primaria, el estudio de la matemática considera el conocimiento del lenguaje aritmético, algebraico y geométrico, así como la interpretación de información y de los procesos de medición…” (SEP, 2011a: 49)

A su vez, el mapa curricular *(Anexo 1)* está organizado en cuatro etapas de escolaridad[8] (Figura 1.2) que “indican la progresión de los Estándares Curriculares de Español, Matemáticas, Ciencias, Segunda Lengua: Inglés y Habilidades Digitales”. (SEP, 2011a: 41)

Estándares Curriculares		
Periodo escolar	Grado escolar de corte	Edad aproximada
Primero	Tercer grado de preescolar	Entre 5 y 6 años
Segundo	Tercer grado de primaria	Entre 8 y 9 años
Tercero	Sexto grado de primaria	Entre 11 y 12 años
Cuarto	Tercer grado de secundaria	Entre 14 y 15 años

Figura 1.2 Organización de los cuatro periodos de escolaridad en los que se divide la Educación Básica y para los cuales se definen los estándares curriculares. (SEP: 2011a)

Los Estándares Curriculares, según el plan de estudios actual, constituyen:

> …el referente para el diseño de instrumentos que, de manera externa, evalúen a los alumnos… y expresan lo que lo alumnos deben saber y ser capaces de hacer en los cuatro periodos escolares” (SEP, 2011a: 86).

[8] Con la reforma realizada en México en el año 2011 a la Educación Básica, se crea esta nueva organización en etapas de escolaridad, ya que antes la educación primaria se dividía en ciclos escolares abarcando dos grados consecutivos, quedando organizada en tres ciclos correspondientes al primer y segundo grado, tercero y cuarto y finalmente quinto y sexto grados.

Respecto de los Estándares Curriculares de Matemáticas, encontramos que éstos "comprenden el conjunto de aprendizajes que se espera de los alumnos en las cuatro etapas de escolaridad (antes mencionadas) para conducirlos a altos niveles de alfabetización matemática" (SEP, 2011a: 88) y se organizan en los siguientes Ejes:

1. Sentido numérico y pensamiento algebraico.
2. Forma, espacio y medida.
3. Manejo de la información.
4. Actitud hacia el estudio de las matemáticas.

El eje temático que nos interesa analizar, debido a que en él se encuentran los números decimales, es el de Sentido numérico y pensamiento algebraico, que para el tercer periodo o etapa escolar (cuarto, quinto y sexto grados) incluye los siguientes temas:

1.1. Números y sistemas de numeración.

1.2. Problemas aditivos.

1.3. Problemas multiplicativos.

Los estándares curriculares que corresponden a los números decimales son:

El alumno:

1.1.1. Lee, escribe y compara números naturales, fraccionarios y decimales.

1.1.2. Resuelve problemas aditivos con números naturales, fraccionarios y decimales, empleando los algoritmos convencionales.

1.1.3. Resuelve problemas que impliquen multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales entre números naturales, utilizando los algoritmos convencionales. (SEP, 2011 b, c y d: 64)

Dentro del currículo de la Educación Primaria, dichos números comienzan a trabajarse desde cuarto hasta sexto grado a través de los cinco bloques en los que está organizado cada ciclo escolar (Figura 1.3).

CUARTO GRADO				
Bloque	Aprendizajes Esperados	Eje Sentido Numérico y pensamiento algebraico		
		Números y sistemas de numeración	Problemas aditivos	Problemas multiplicativos
1	Identifica fracciones equivalentes, mayores o menores que la unidad.	Notación desarrollada de números naturales y decimales. Valor posicional de las cifras de un número.	Resolución de sumas o restas de números decimales en el contexto del dinero. Análisis de expresiones equivalentes.	
2			Uso del cálculo mental para resolver sumas o restas con números decimales.	
3	Identifica expresiones aditivas, multiplicativas o mixtas que son equivalentes, y las utiliza al efectuar cálculos con números naturales.	Descomposición de números naturales y decimales en expresiones aditivas, multiplicativas o mixtas.		
4	Resuelve problemas que implican sumar o restar números decimales.	Resolución de sumas o restas de números decimales en diversos contextos.		

QUINTO GRADO				
Bloque	Aprendizajes Esperados	Eje Sentido Numérico y pensamiento algebraico		
		Números y sistemas de numeración	Problemas aditivos	Problemas multiplicativos
2		Análisis del significado de la parte decimal en medidas de uso común, por ejemplo: 2.3 m. y 2.3 hrs.		Resolución de problemas que impliquen una división de números naturales con cociente decimal.
3			Uso del cálculo mental para resolver adiciones y sustracciones con números fraccionarios y decimales.	
5	Resuelve problemas que implican multiplicar números decimales por números naturales.			Resolución de problemas que impliquen multiplicaciones de números decimales por números naturales, con el apoyo de la suma iterada (repetida).

SEXTO GRADO				
Bloque	Aprendizajes Esperados	Eje Sentido Numérico y pensamiento algebraico		
		Números y sistemas de numeración	Problemas aditivos	Problemas multiplicativos
1	Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación. Resuelve problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que implican dos o más transformaciones.	Lectura, escritura y comparación de números naturales, fraccionarios y decimales. Explicitación de los criterios de comparación.	Resolución de problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios, variando la estructura de los problemas. Estudio o reafirmación de los algoritmos convencionales.	Resolución de problemas multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no formales.
2	Calcula porcentajes e identifica diversas formas de representación (fracción común, decimal, %)	Ubicación de fracciones y decimales en la recta numérica en situaciones diversas.		
3		Identificación de una fracción o un decimal entre dos fracciones o decimales dados. Acercamiento a la propiedad de densidad de los racionales en contraste con los números naturales.		
4		Conversión de fracciones decimales a escritura decimal y viceversa. Aproximación de algunas fracciones no decimales usando la notación decimal. ***Identificación y aplicación de la regularidad de sucesiones con números (naturales, fraccionarios o decimales) que tengan progresión aritmética o geométrica, así como sucesiones especiales. Construcción de sucesiones a partir de la regularidad.***		
5	Resuelve problemas que implican multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales.			Resolución de problemas que impliquen una división de número fraccionario o decimal entre un número natural.

Figura 1.3 Tabla con los contenidos relacionados con los números decimales por grado escolar.

Los decimales, al ser un contenido incluido en el currículo y abordarse a lo largo de la mitad de los grados que integran la Educación Primaria, denotan tener suma importancia al ser no sólo un elemento en la formación que implica este tipo de educación (la cual pretende que los alumnos “desarrollen competencias, conocimientos, habilidades, actitudes y valores para enfrentar con éxito diversas tareas y logren ser capaces de desenvolverse satisfactoriamente en cualquier ámbito” (SEP, 2011a: 39)), sino también un peldaño que permitirá a los alumnos desarrollar habilidades y adquirir conocimientos que le servirán en situaciones escolares posteriores.

Se observa que en el actual programa de estudios se da prioridad a aspectos prácticos como es la resolución de problemas aditivos y multiplicativos en los que se emplean diversos contextos como el dinero y las medidas, así como el cálculo mental. Se incluyen en menor medida, contenidos que lleven a los alumnos a la comprensión de aspectos como las diferentes formas en que se puede representar un número decimal, la ubicación de los decimales en la recta numérica y la identificación de la propiedad de densidad, por citar algunas.

Asimismo, se identifica que no se hacen explícitas las formas en que se debe abordar este contenido en el aula para contrarrestar el hecho de que los alumnos trasladen la lógica de los números naturales a sus intentos de comprensión de los decimales, traslado que genera falsas ideas y formas de interpretación incorrectas de dichos números.

Por lo anterior, es que en esta investigación se da cuenta de las tareas o actividades desarrolladas durante un periodo de instrucción con alumnos de sexto grado, con el objetivo de que los alumnos avancen en la comprensión de diversos aspectos de los números decimales que las investigaciones previas han reconocido como difíciles de comprender.

1.2.1. Resultados de los exámenes nacionales: ENLACE y EXCALE

Los resultados que arrojan diversas evaluaciones realizadas en México a nivel nacional en relación con todos los contenidos matemáticos, incluyendo los números decimales, muestran que a diferencia de lo que piensa la mayoría de los docentes de educación primaria, la enseñanza de los decimales representa un problema (Ávila, 2008a, 2013) y los alumnos tienen dificultades para comprenderlos, por lo que hay que prestarles suma atención. Ejemplo de esto son los resultados que se obtienen en las pruebas nacionales realizadas con el fin de dar cuenta del nivel de aprendizaje que tienen los estudiantes respecto a contenidos matemáticos específicos. En este caso retomaremos solamente aquellos que se relacionan con los números decimales, por ser el objeto de estudio de la presente investigación.

- **La prueba ENLACE[9]**

Es una evaluación que realiza la Secretaría de Educación Pública anualmente tanto en planteles públicos como privados de todo el territorio mexicano, su propósito es:

> Generar una sola escala de carácter nacional que proporcione información comparable de los conocimientos y habilidades que tienen los estudiantes en los temas evaluados.[10]

En el nivel de la educación primaria, dicha evaluación se aplica a alumnos de tercero a sexto grado, acorde a los actuales programas de estudios oficiales, evaluando las asignaturas de Español y Matemáticas principalmente, además de una tercera asignatura que es diferente cada año.

La prueba ENLACE correspondiente al ciclo escolar 2010-2011, se conformó con un total de 61 reactivos de matemáticas, distribuidos en tres ejes temáticos de la siguiente manera:

---

[9]Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares
[10] Recuperado de http://www.enlace.sep.gob.mx/que_es_enlace/ el 25 de enero de 2014.

- 22 reactivos del eje Sentido numérico y pensamiento algebraico.
- 21 del eje de Forma, espacio y medida, y
- 18 del eje de Manejo de la información.

De los 22 reactivos del eje Sentido numérico y pensamiento algebraico, 10 están relacionados con los números decimales (Figura 1.4)

CANTIDAD DE REACTIVOS	ASPECTO A EVALUAR	% ACIERTOS PRIMARIA GENERAL	% ACIERTOS PRIMARIA PARTICULAR	% ACIERTOS A NIVEL NACIONAL
1	Encontrar 1 número entre dos decimales dados.	63%	77%	64%
1	Ordenar números decimales de menor a mayor	72%	76%	72%
2	Ubicar el número decimal que corresponde a un punto en la recta	38% 44%	46% 55%	39% 45%
2	Identificar la representación decimal que corresponde a una fracción.	46%	55%	46%
2	Resolver problemas de multiplicación y división de un número decimal con un natural.	49% 54%	57% 61%	50% 54%
1	Identificar la equivalencia de un número decimal con una fracción	56%	55%	55%
1	Identificar el valor posicional de una cifra dentro de un decimal.	34%	37%	34%

Figura 1.4 Porcentaje[11] de aciertos obtenidos por aspecto evaluado en la evaluación Enlace del ciclo escolar 2010-2011.

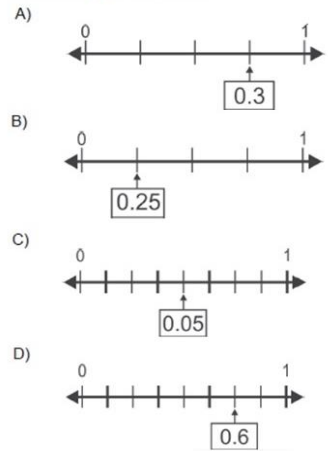
Los reactivos que se incluyeron en la prueba ENLACE 2011, relacionados con los decimales, son semejantes a los siguientes ejemplos: (Figuras 1.5, 1.6 y 1.7).

[11] En los casos donde hubo dos reactivos del mismo aspecto, se presentan los porcentajes obtenidos en ambos.

PREGUNTA 30

Pregunta	Grado de Dificultad	Unidad	Tema	Propósito	Respuesta correcta
30	Medio	Significado y uso de los números	Números fraccionarios y decimales	Identificar el decimal que corresponde a un punto en la recta numérica.	B

30. ¿En cuál de las siguientes rectas está correctamente marcado el punto decimal?



Porcentaje de respuestas por opción y estrato:

	PARTICULAR	GENERAL	INDÍGENA	CONAFE	NACIONAL
A	17	21	24	28	21
B	46	38	34	25	39
C	19	23	24	29	23
D	18	18	17	17	18

Figura 1.5 Reactivo No. 30 de la prueba ENLACE 2011 correspondiente a 6° grado. Se observa que el 39% de los alumnos a nivel nacional, resolvieron correctamente el ejercicio. (Tomada del cuadernillo "Características Generales e Información de los Reactivos Aplicados para su Uso Pedagógico. Sexto Grado de Primaria 2011" SEP.)

Adicional a los 10 reactivos antes mencionados, se encontraron dos reactivos del eje Manejo de la información en los cuales se pide establecer la equivalencia entre una razón y la representación decimal correspondiente, obteniéndose un 71% de respuestas correctas al relacionarlo con el porcentaje y un 38% al establecer la relación con la longitud y el tiempo.

PREGUNTAS 78

Pregunta	Grado de Dificultad	Unidad	Tema	Propósito	Respuesta correcta
78	Medio	Significado y uso de los números	Números fraccionarios y decimales	Identificar la mejor aproximación de una fracción con denominador 3, 6 o 9 al escribirla como número con punto decimal.	D

78. ¿Cuál de los siguientes números está más aproximado a $\frac{35}{6}$?

A) 5.083 B) 5.803
C) 5.038 D) 5.833

Porcentaje de respuestas por opción y estrato:

	PARTICULAR	GENERAL	INDÍGENA	CONAFE	NACIONAL
A	14	15	15	16	15
B	17	17	17	18	17
C	24	28	28	38	27
D	45	40	40	29	40

Figura 1.6 Reactivo No. 78 de la prueba ENLACE 2011 correspondiente a 6° grado. Se observa que sólo el 40% de los alumnos a nivel nacional, resolvieron correctamente el ejercicio.

Por último, identificamos un reactivo relacionado con la multiplicación con números decimales en el contexto de transformación de medidas en centímetros a medidas en yardas, obteniéndose aquí un 59% de respuestas correctas.

Pregunta	Grado de Dificultad	Unidad	Tema	Propósito	Respuesta correcta
120	Medio	Análisis de la información	Relaciones de proporcionalidad	Resolver problemas de proporcionalidad que impliquen razones como escalas, densidad, velocidad; en donde se usen unidades de medida difrentes, por ejemplo, 1 cm: 1m; 3mg por litro; 4 metros por segundo, etc.	C

120. Helena corre diariamente en el parque a una velocidad de 6 km/h. Como hoy tenía que regresar temprano a su casa, solamente recorrió 4500 m. ¿Cuánto tiempo corrió el día de hoy?

A) 7.5 horas.
B) 1.333 horas.
C) 0.75 horas.
D) 0.075 horas.

Porcentaje de respuestas por opción y estrato:

	PARTICULAR	GENERAL	INDÍGENA	CONAFE	NACIONAL
A	25	30	31	37	29
B	22	22	25	25	22
C	44	38	32	26	38
D	9	11	12	12	11

Figura 1.7 Reactivo No. 120 de la prueba ENLACE 2011 correspondiente a 6° grado. Se observa que sólo el 38% de los alumnos a nivel nacional, resolvieron correctamente el ejercicio.

Si analizamos los resultados obtenidos en estos reactivos, podemos identificar que menos del 50% de los alumnos de sexto grado muestra un buen dominio en el uso de los decimales, a pesar de que éstos no son considerados como un problema relevante de enseñanza.

- **EXCALE[12]**

Comparemos ahora los resultados de la prueba ENLACE con los que reportan otras evaluaciones como la que se realiza mediante los exámenes llamados EXCALE, aplicados por el INEE[13].

> Los Excale son pruebas de aprendizaje de gran escala que miden el logro escolar de los estudiantes de educación básica en distintas asignaturas y grados, tienen tres características distintivas: Son criteriales ya que se diseñan para evaluar el dominio que tienen los estudiantes de una disciplina en particular. Están alineados al currículo porque su propósito es evaluar los aprendizajes pretendidos por los planes y programas de estudio nacionales. Son matriciales ya que los reactivos que conforman una prueba se agrupan en bloques para ser distribuidos entre los alumnos; no todos contestan las

[12] Exámenes de la Calidad y el Logro Educativo.
[13] Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

> mismas preguntas, pero con las respuestas de todos se obtienen resultados del examen en su conjunto[14].

Esta prueba se aplica cada cuatro años a distinto nivel y grado educativo. En el caso de la educación primaria, la aplicación a los alumnos de sexto grado correspondió al ciclo escolar 2004-2005 y arrojó resultados verdaderamente preocupantes, ya que reflejaba que poco más del 20% y menos del 50% de los alumnos lograron resolver exitosamente problemas que implicaban suma y resta de números decimales; también se mostró que los alumnos tienen un mejor dominio de la parte operatoria de los decimales y que hay más problemas para comprender la parte conceptual.

Es decir, las tareas que les resultaron más sencillas a los estudiantes fueron aquellas que implicaban sólo sumar, restar y multiplicar decimales, mostrando mayor dificultad en problemas de división y aquellos que involucraban comparar y ordenar decimales, ello posiblemente se deba a "…que resolver operaciones con decimales sigue reglas similares a las de los naturales, mientras que la parte conceptual de estos números rompe con muchas de las ideas que se tienen sobre ellos" (Ávila, 2008a:88).

La lectura y escritura de decimales, también representó un problema para los alumnos en la resolución de la prueba Excale. Según lo reporta Ávila (2008a), dichas dificultades no sólo se mostraron en los alumnos de sexto grado, sino que también se hicieron presentes en los alumnos de tercer grado de Educación Secundaria donde se siguen encontrando dificultades al realizar tareas que involucran: a) la interpretación de números decimales, b) problemas que implican dos o más operaciones con dichos números, c) la comparación de dichos números, y d) problemas que involucran conversiones y escritura de decimales.

La prueba EXCALE correspondiente al año 2009 evaluó las asignaturas de Español, Matemáticas, Ciencias y Formación Cívica y Ética en cada una

[14] Tomado de: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, Explorador Excale. <http://www.inee.edu.mx/explorador>, [04 de abril de 2013].

de las cuales se evaluaron diversos aspectos. Los rubros correspondientes a la asignatura de matemáticas fueron:

- Figuras geométricas, cuerpos geométricos y ubicación espacial.
- Longitudes, áreas, volúmenes, peso y tiempo.
- Números naturales, decimales y fraccionarios.
- Tablas, diagramas gráficas o pictogramas, medidas de tendencia central, mayor o menor probabilidad de evento, cálculo de porcentajes y variación proporcional.

Respecto a los números naturales, decimales y fraccionarios se evaluaron 117 contenidos temáticos distribuidos de la siguiente manera:

- 54 de Números naturales
- 32 de Números decimales y
- 31 de Números fraccionarios

En los 32 reactivos relacionados con los números decimales se obtuvieron los resultados mostrados en la Figura 1.8.

CONTENIDO TEMÁTICO (ASPECTO A EVALUAR)	% ACIERTOS PRIMARIA GENERAL	% ACIERTOS PRIMARIA PARTICULAR	% ACIERTOS A NIVEL NACIONAL
Resolver problemas que impliquen números decimales hasta milésimos.	88%	93%	86%
Resolver problemas que impliquen sumar números decimales.	74%	79%	72%
Resolver problemas de suma de números decimales hasta centésimos con más de dos sumandos.	64%	83%	62%
Resolver problemas que impliquen restar números decimales hasta centésimos en su significado de quitar.	60%	68%	58%
Ubicar números decimales en la recta numérica hasta centésimos.	59%	71%	58%
Resolver problemas que impliquen multiplicar números decimales hasta centésimos.	60%	70%	56%
Multiplicar números decimales hasta centésimos.	57%	76%	56%
Restar números decimales hasta centésimos.	56%	81%	56%
Resolver problemas que impliquen una división de números decimales en el dividendo.	56%	73%	53%
Resolver problemas que impliquen una división de un número decimal entre un natural.	52%	65%	49%
Restar un número entero a un decimal hasta centésimos.	51%	71%	49%
Identificar la representación numérica de un número entero con decimales hasta centésimos.	48%	63%	48%
Identificar la representación con letra de un número decimal hasta milésimos.	50%	58%	48%
Convertir una fracción a un número decimal con denominador potencia de 10.	47%	67%	47%
Restar números decimales hasta milésimos en forma horizontal con el minuendo mayor en cifras en la parte decimal	46%	64%	47%
Resolver problemas de sustracción de números decimales hasta centésimos donde el minuendo tiene un mayor número de cifras en la parte decimal.	46%	60%	45%
Identificar la escritura de un número decimal hasta milésimos.	47%	61%	45%
Sumar números decimales hasta milésimos.	44%	63%	45%
Convertir números fraccionarios a decimales con denominador distinto a la potencia de 10	46%	56%	44%
Escribir números decimales hasta milésimos.	45%	61%	44%
Identificar la representación con letra de un decimal hasta centésimos.	44%	58%	43%
Comparar números decimales hasta milésimos.	43%	64%	43%
Identificar la equivalencia entre números decimales hasta milésimos	43%	54%	42%
Restar números decimales hasta milésimos en forma horizontal, con el minuendo con menor número de cifras en la parte decimal.	41%	63%	42%
Resolver problemas que impliquen encontrar la equivalencia entre números decimales hasta milésimos.	43%	54%	41%
Resolver problemas que impliquen una resta de números decimales hasta centésimos en su significado de diferencia.	43%	60%	41%
Realizar una división entre números naturales con cociente hasta centésimos, en donde el dividendo es menor que el divisor.	40%	54%	40%
Resolver problemas que impliquen relacionar órdenes de millones y unidades a partir del punto decimal en contextos de dinero.	36%	42%	35%
Comparar números decimales no enteros hasta milésimos.	36%	49%	34%
Resolver problemas que impliquen una división entre dos dígitos con cociente hasta centésimos.	35%	56%	34%
Resolver problemas que impliquen comparar números decimales hasta centésimos.	31%	43%	29%
Ordenar en forma ascendente números decimales hasta milésimos.	21%	33%	18%

Figura 1.8 Tabla de los contenidos evaluados en la prueba EXCALE 2009 con los porcentajes de respuestas correctas obtenidos.

Si observamos la figura 1.8, identificaremos que considerando los resultados a nivel nacional, sólo 9 de los 32 aspectos evaluados se encuentran por encima del 50% de aciertos, y que los reactivos corresponden a aquellos donde se pone en juego el uso de los algoritmos convencionales de la suma, resta, multiplicación y división para la resolución de problemas con cantidades hasta centésimos. Probablemente esto coincida con el tipo de actividades a las que en las escuelas se da prioridad al trabajar con los números decimales, más que a otras prácticas que lleven a los alumnos a una mayor reflexión sobre su naturaleza y su uso.

Se muestra que en promedio, menos del 50% de los alumnos de sexto grado tiene un buen dominio de los decimales en diversos aspectos como lo son la resolución de problemas y su aplicación en las operaciones básicas cuando se trata con cantidades hasta milésimos, mostrándose mayor dificultad en las divisiones, la identificación de las diversas representaciones de los decimales (representación numérica, con letra, gráfica, entre otras), así como en la equivalencia entre decimales, la comparación y el orden entre decimales.

Los reactivos que se incluyeron en la prueba EXCALE 2009, relacionados con los decimales, son semejantes a los ejemplos[15] que se muestran en las figuras 1.9, 1.10 y 1.11:

1. IDENTIFICACIÓN DEL CONTENIDO A EVALUAR

a. Eje temático: Los números, sus relaciones y sus operaciones	**b. Tema:** Números decimales
c. Línea de evaluación: Comparación y orden de los números decimales. **d. Especificación general como aparece en la Tabla de contenidos:** Ordenar más de dos números decimales con distinto número de cifras.	

2. REACTIVO MUESTRA

- **Base del reactivo:**

En la siguiente tabla se muestra el tiempo que empleó cada ciclista en una competencia.

Nombre	Tiempo en minutos
Rafael Sánchez	18.087
Ricardo Mendoza	18.090
Pedro Torres	18.20
Gustavo Rojo	18.0871

¿En qué orden llegaron los ciclistas a la meta?

- **Opción correcta:**

A) Rafael Sánchez, Gustavo Rojo, Ricardo Mendoza, Pedro Torres.

- **Opciones consideradas incorrectas:**

B) Pedro Torres, Ricardo Mendoza, Gustavo Rojo, Rafael Sánchez.
C) Pedro Torres, Ricardo Mendoza, Rafael Sánchez, Gustavo Rojo.
D) Gustavo Rojo, Rafael Sánchez, Ricardo Mendoza.

Figura 1.9 Este reactivo es un ejemplo del contenido temático Ordenar en forma ascendente números decimales hasta milésimos, donde se muestra que sólo el 18% de los alumnos a nivel nacional resolvió correctamente.

[15] Tomados de: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, Explorador Excale. <http://www.inee.edu.mx/explorador>, [09 de julio de 2013].

1. IDENTIFICACIÓN DEL CONTENIDO A EVALUAR

a. Eje temático	**b. Tema**
Los números, sus relaciones y sus operaciones	Números decimales

c. Línea de evaluación:
Lectura y escritura de números decimales

d. Especificación general como aparece en la Tabla de contenidos:
Escribir números fraccionarios en forma decimal cuando el denominador es una potencia de 10.

2. EJEMPLO DE REACTIVO

Conversión de fracción decimal a número decimal.

- **Base del reactivo:**

María compró $\frac{10}{100}$ metro de listón. ¿Cuál de las siguientes expresiones indica la cantidad de listón que compró María?

- **Opción correcta:**

.10 metros.

- **Opciones consideradas incorrectas:**

10 metros

100 metros

.01 metros

Conversión de número decimal a fracción decimal

- **Base del reactivo:**

Para hacer un experimento de química Rodrigo necesita 0.056 gramos de carbonato. ¿Cuál de las siguientes fracciones expresa los gramos de carbonato que necesita Rodrigo?

- **Respuesta correcta:**

A. $\frac{56}{1000}$

- **Distractores:**

a. $\frac{56}{100}$

b. $\frac{100}{56}$

c. $\frac{1000}{56}$

Figura 1.10 Ejemplo del reactivo donde se evalúa que los alumnos puedan: Convertir una fracción a número decimal con denominador potencia de 10, donde se muestra que sólo el 47% de los alumnos a nivel nacional resuelve correctamente.

1. DATOS DE IDENTIFICACIÓN DEL CONTENIDO

a. Asignatura: Matemáticas.	**b. Grado y nivel educativo:** 6° Primaria.
c. Área: Los números, sus relaciones y sus operaciones.	**d. Tema:** Números decimales.
e. Contenido / Contenido eje para la elaboración del reactivo: Lectura y escritura de números decimales. **f. Especificación general como aparece en la tabla de contenidos:** Uso del punto decimal y su relación con la unidad de referencia.	

2. REACTIVO MUESTRA

En México hay <u>2.6</u> millones de vendedores ambulantes. ¿Cuántos vendedores ambulantes representan la parte decimal del número subrayado?

A. 600 000 *

B. 0.6

C. 6.0

D. 6 000 000

* Respuesta correcta

Figura 1.11 Este reactivo es un ejemplo del contenido temático Resolver problemas que impliquen relacionar órdenes de millones y unidades a partir del punto decimal en contextos de dinero, donde se muestra que sólo el 35% de los alumnos a nivel nacional, resuelve correctamente.

Por los resultados de la prueba EXCALE parece que en las aulas no se trabajan (o no se trabajan de manera suficiente y adecuada) todos los aspectos de los decimales que favorecerían una buena comprensión de los mismos. También reflejan que más de la mitad de los alumnos que terminan la educación primaria lo hacen sin saber resolver situaciones que impliquen el uso de los números decimales.

Las pruebas antes mencionadas son ejemplo de que aún falta mucho por trabajar en las escuelas de educación primaria en relación con los decimales, para mejorar dichos resultados pero sobre todo, para que los alumnos verdaderamente comprendan sus características y puedan aplicarlos en diversas situaciones. La pregunta que surge aquí, es: ¿Por qué si los decimales no se consideran un problema de enseñanza, los resultados que arrojan las evaluaciones de los alumnos reflejan tan poco dominio de ellos?

A través de las pruebas Enlace y Excale se ha identificado que en general, los aprendizajes de los números decimales que se obtienen en la escuela no son satisfactorios, dado que en los resultados que reflejan ambas pruebas predominan puntajes de logro por debajo del 50%, esto es, menos de la mitad de los estudiantes mexicanos logran responder acertadamente a las cuestiones planteadas sobre los decimales.

Por tales motivos es necesario que se preste mayor atención al proceso que los estudiantes siguen para llegar a la comprensión de dichos números, dotándolos de significados adecuados y modificando aquellas ideas que si bien en un determinado momento de su aprendizaje fueron útiles, les impidan adquirir o desarrollar ideas más complejas.

1.3. La comprensión de los números decimales como objetivo de investigación.

Diferentes investigaciones han mostrado que los alumnos tienen complicaciones al aprender los números decimales, muchas de ellas debidas a la dificultad propia del contenido matemático, mientras que otras son provocadas por conocimientos adquiridos anteriormente a partir de la enseñanza. A continuación, presentamos una descripción de tales dificultades.

- **Significado de los decimales**

La forma en que generalmente se presentan los números decimales en la escuela primaria, como una extensión de los números naturales puede llevar a que los estudiantes produzcan interpretaciones confusas sobre dichos números.

Al contener una parte menor que la unidad que se escribe después del punto, los decimales sólo se asocian a contextos como la medición y el dinero (Sáiz, Gorostegui y Vilotta, 2011), siendo que con problemas relacionados a estos ámbitos no es posible poner en evidencia muchas de las ideas erróneas que inicialmente tienen los alumnos (Broitman, Itzcovich y Quaranta, 2003).

El contexto del dinero si bien en un primer momento puede ser útil para acercar a los estudiantes a los números decimales, no es del todo adecuado para el aprendizaje de las implicaciones de dichos números, ya que los alumnos tienden a separar la parte entera de la decimal utilizando dos unidades diferentes e independientes. Por ejemplo, en el contexto del dinero, al hablar de $15.20, los estudiantes separan la cantidad como 15 pesos y 20 centavos, conceptualizándolos como dos números distintos, es decir, no establecen la relación que tienen los veinte centavos con un peso (Van Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer, Van Herpen, Keijzer, 2008).

Investigaciones recientes sobre los números decimales reportan que una de las principales dificultades a las que se enfrentan los estudiantes están relacionadas con el intento de extender los conocimientos sobre los números naturales a los decimales, ello genera confusiones en los alumnos, ya que las reglas que se aplican a los números naturales, no son funcionales en todos los casos, al trabajar con decimales. (Brekke, 1996 y Hannula, 2003 citado en Verschaffel, et al. 2006; Broitman et al. 2003).

La mayoría de los estudiantes tiende a identificar a los decimales como todos aquellos números que poseen punto decimal (Ávila, 2013), lo que refleja que no se hace la distinción entre el número y su representación (Konic et al. 2010).

"*La caracterización de los decimales como números con punto es inevitable*" (Saiz et al. 2011:135) en un primer momento de su aprendizaje, pero esta idea debe ser cuestionada más adelante dado que los números racionales no decimales y los irracionales tienen representaciones que incluyen el punto y no por ello pertenecen al grupo de los decimales. Para evitar este tipo de errores conceptuales en los alumnos, donde confunden las expresiones decimales con los números decimales, como si ambas fueran sinónimos, se sugiere "*distinguir el objeto matemático "número decimal" de una de las formas de representación de los números…*" (Saiz et al. 2011: 136), para evitar en los estudiantes la tendencia a pensar que sólo la parte a la derecha del punto es decimal (Gómez, 2010).

De igual manera se reconoce que existe una tendencia a promover "*una versión restringida de las expresiones equivalentes*" de los decimales (Sáiz et al. 2011: 135), ya que sólo se hace el cambio de la representación en fracción a la representación con punto, dejando de lado otro tipo de representaciones. El aprendizaje de un número conlleva conocer sus diferentes representaciones (oral, icónica y numérica), sabiendo de antemano que dicho conocimiento es complejo ya que supone movilizar los conocimientos a diferentes situaciones de referencia y en diferentes registros de representación, articulando las situaciones con las representaciones (Roditi, 2007).

Las fracciones son presentadas desde los primeros grados de escolaridad como parte de un todo (parte de una región o de una parte de un conjunto) por lo que este conocimiento es el que guía la interpretación de los alumnos y en ocasiones impide verlas como otras formas de representación, por ejemplo, de un número decimal (Hiebert, 1992: 292).

- **Lectura y escritura de los números decimales**

Una de las razones por las que existe confusión en los alumnos entre los números naturales y los decimales radica en las similitudes existentes en la notación y forma de escritura, y en que no se enfatiza lo suficiente qué cantidades se pueden representar con cada uno de ellos (cantidades discretas para los naturales y continuas para los decimales), además de la complejidad cognitiva que ellos representan (Hiebert, 1992).

Los estudiantes tienen dificultades respecto a la lectura y escritura de los números, lo que demuestra que no han comprendido cabalmente el sistema de numeración decimal y por tal motivo no se puede esperar que lleguen a la comprensión de la escritura de los decimales mientras no logren el dominio de la escritura con números enteros.

Estas dificultades son debidas a que la mayoría de los estudiantes no han afianzado la idea del valor posicional, dado que éste se ha entendido solamente como la identificación del nombre de la posición que ocupa una cifra, sin considerar la relación existente con la base diez que organiza nuestro sistema de numeración, la cual determina el valor de una cifra dada su posición (Ávila, 2013). Se da también el hecho de que los estudiantes combinan ideas de los números naturales con las de los decimales para nombrar y representar a los números decimales, por ejemplo, cuando se les pide elegir de las siguientes opciones: 37.000, 0.037, 0.37, 37, 37 000 el número que representa 37 milésimos, la mayoría responde 37 000 o 37.000, "*pareciendo que buena parte de los alumnos en edades entre 9 y 13 años interpreta (al 37) como enteros y piensan que para que haya milésimos tiene que haber tres ceros*", dando origen al tipo de representaciones antes indicadas. (Centeno, 1997:136).

- **Equivalencia entre distintos órdenes de la parte fraccionaria de un número.**

Los estudiantes, pocas veces reconocen la equivalencia entre dos números como 3.7 y 3.70 ya que tienden a considerarlos como dos cantidades diferentes al interpretarlos como dos números naturales que se encuentran separados por el punto (Broitman et al., 2003), desde esa perspectiva, llegan a considerar que el 0.7 es menor que el 0.70, sin identificar que ambos representan la misma cantidad.

Reconocer al cero como indicador de lugar, también es un aspecto confuso para los estudiantes ya que en ocasiones optan por ignorar dicho número, provocando la pérdida de su estructura y viéndolo sólo como un entero, por ejemplo, al leer el número 0.47, los niños lo interpretan sólo como 47 (Centeno,1997). Este error está motivado por la idea que se inculca en la escuela de que el cero no tiene un valor o simplemente que no vale nada, lo cual repercute drásticamente en la adquisición de nuevos aprendizajes como el de los decimales. También está el caso en el que no se reconocen equivalencias entre dos decimales como 2.41 y 2.410, ello es debido a la aparición del cero en dicha cantidad, considerando que el .410 es mayor que el .41 por la aparición del cero.

- **Comparación y orden.**

Los errores o dificultades a los que se enfrentan los alumnos en este aspecto se refieren a que para comparar los números decimales, en algunas ocasiones, los estudiantes interpretan la parte decimal del número como grupos de números con características similares a las de los naturales, o como pares de enteros separados por un punto (Roditi, 2007), lo que no siempre los lleva a obtener resultados correctos. Un ejemplo de esto es que al pedir a los alumnos que ordenen ciertos números decimales como 2.08, 2.139 y 2.15, pueden considerar que.15 es menor que .139, por lo tanto al ordenarlos de menor a mayor quedarán ordenados de la manera siguiente: 2.08, 2.15 y por último 2.139. En este caso, solamente el primer número que es 2.08 se encuentra en el lugar adecuado, al ser menor que 2.15 y 2.139, habiendo error en el orden de los otros dos números. También se da el caso contrario en que los alumnos movilizan una regla implícita en la que consideran que la parte decimal será más pequeña en tanto la cantidad de cifras sea más grande (Roditi, 2007), considerando así que 2.739 será menor que 2.4.

Asimismo, muchos niños consideran la cantidad de cifras que posee un número como criterio para determinar si un número es mayor que otro, entonces al pedirles ordenar de menor a mayor los siguientes números, 0.07, 0.316, 0.2 y 0.1429, es común que lo hagan de la siguiente forma 0.2, 0.07, 0.316 y 0.1429, lo cual también genera errores. Los estudiantes generalmente tienden a considerar la cantidad de cifras de un número decimal o el conjunto de cifras contenidas en la parte decimal (viéndolos como si fueran naturales), como criterios determinantes en la comparación, lo que provoca confusiones en los alumnos y obviamente lleva a errores. (Fuglestad, 1996 y Steinle & Stacey, 2003, 2004 citado en Verschaffel, et al. 2006).

Los razonamientos en ocasiones seguidos por los estudiantes, referentes a considerar la cantidad de cifras como elemento para ordenar números decimales, generalmente provoca errores en el ordenamiento (Roditi, 2007). Al respecto, Ávila (2013) identifica que algunos de estos errores se deben a que existe un "*desconocimiento del valor del décimo, el centésimo y el milésimo y de las relaciones de equivalencia entre ellos*" (p. 45), lo que los lleva a emplear procedimientos sintácticos más que a una verdadera reflexión sobre el significado de cada cifra.

Es importante mencionar que, ante este tipo de dificultades, un recurso al que frecuentemente recurren los estudiantes para tratar de lograr una mejor comprensión de los decimales, es el uso del cero como elemento para igualar cantidades y posteriormente proceder a la comparación (Resnick, Nesher, Leonard, Magone, Omanson & Peled, 1989; Ávila, 2013).

- **Distintas representaciones de los decimales.**

Las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes para comprender o identificar la diversidad de representaciones mediante las que se puede expresar un número decimal, es uno de los aspectos de los que se encuentran pocos reportes. Sin embargo, es un reto para los estudiantes "comprender la unicidad del concepto decimal subyacente en la pluralidad de representaciones" (Ávila, 2013: 33). Por ejemplo, al solicitar a los estudiantes vincular superficies fraccionadas con los números decimales en su representación con punto y mediante la forma $\frac{a}{b}$, se encuentra que existe una limitada capacidad para reconocer la representación con punto correspondiente a una determinada superficie. Por ejemplo, al tener un rectángulo dividido en octavos donde se encuentran sombreadas tres de las ocho partes, los estudiantes difícilmente reconocen que esa superficie corresponde al decimal 0.375, o que al tener una figura dividida en quintos, donde se encuentra sombreada una de las cinco partes, el decimal correspondiente es 0.2. Esto se debe, probablemente, a que para obtenerlos es necesario hacer conversiones con las que no siempre están familiarizados los alumnos. Por otra parte, es menos difícil para los estudiantes encontrar las representaciones de la forma $\frac{a}{b}$, ya que les resulta más congruente encontrar expresiones como $\frac{3}{8}$ y $\frac{1}{5}$, para los casos antes mencionados. (Ávila, 2013).

- **Densidad**

Otro aspecto de los decimales que se ha reportado como difícil de comprender por los estudiantes es la propiedad de densidad (Ávila, 2013). Se sabe que uno de los aspectos que distingue a los números decimales de los naturales es la propiedad de densidad. Sin embargo, esta propiedad fundamental es difícil de comrpender por parte de los niños, ya que se sobre-generaliza la naturaleza discreta de los números narurales, dificultando la comprensión de las propiedades de continuidad de los decimales que permiten considerar que dado cualquier número decimal, necesariamente habrá otro decimal cerca de éste, de tal forma que no se observará un límite, es decir, que entre cualquier par de decimales, hay infinitamente muchos otros decimales (Widjaja, Stacey & Steinle, 2008).

Se ha identificado que los estudiantes tienden a encontrar un antecesor y un sucesor para un decimal dado, guiándose principalmente por las reglas que se aplican para los naturales que les impide identificar que entre dos decimales dados, aparentemente consecutivos, siempre será posible encontrar otro decimal. Los estudiantes tienden a considerar que entre dos decimales dados “aparentemente consecutivos como 4.25 y 4.26, no se podrá localizar otro decimal” (Brousseau, 1998 citado por Ávila, 2013; Broitman, 2003). Este tipo de ideas, generalmente llevan a los estudiantes a enfrentarse a dificultades en la comprensión de contenidos más complejos, si no se trabajan adecuadamente.

- **Cálculo y operaciones.**

Generalmente los estudiantes entienden que para realizar sumas y restas con decimales basta con saber alinear las cantidades con el punto decimal, situación que se llega a rebasar mediante el uso de la calculadora, ya que permite la obtención del resultado con solo introducir los números con los que se desea operar. Esto vuelve innecesario el conocimiento de ciertas reglas para operar con los decimales, sin embargo, el uso de la calculadora u otros instrumentos, puede llegar a generar confusión en los alumnos ya que en ocasiones al realizar una operación con decimales, ésta hace la aproximación a la cantidad inmediata ya sea superior o inferior, así por ejemplo, al sumar 7.64 + 12.05, arroja un resultado de 19.7, siendo que el resultado correcto es 19.69 (Van Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer, Van Herpen y Keijzer, 2008). Estas cuestiones de redondeo que efectúan las calculadoras, generan dificultades en la interpretación de la notación decimal (Konic, Godino y Rivas, 2010). Además de esto, y como hemos dicho, en la práctica escolar se tiende a operar por separado las partes enteras y las decimales, con lo que los estudiantes reafirman la idea de que el funcionamiento operatorio es similar al que se realiza con los naturales.

Se ha reportado también que los estudiantes tienden a asociar la multiplicación muy fuertemente con el agrandamiento de una cantidad y la división con hacerla más pequeña, idea que es válida para los naturales y en algunos casos para los decimales, pero que no es válida en la totalidad de los casos, creando dudas y confusiones en los alumnos. (Van Galen et al., 2008). Un claro ejemplo de ello es cuando se les pide seleccionar la operación que arroje como resultado al número más grande entre 4 x 0.36 y 4 ÷ 0.36, a lo que responden que será la operación de multiplicación porque se guían por las reglas de los naturales, sin considerar los resultados de dichas operaciones que indican que al multiplicar 4 x 0.36 se obtendrá 1.44, mientras que al dividir 4 ÷ 0.36, el resultado será 11.11. Así se observa que realizar operaciones con decimales, no siempre se seguirán las reglas aplicadas a los naturales.

Al aplicar las operaciones con decimales a la resolución de problemas, los estudiantes tienden a trasladar las ideas que tienen sobre los decimales, haciendo las modificaciones que consideran pertinentes para llegar a la solución, lo que en ocasiones los lleva a inventar procedimientos que no concuerdan del todo con las reglas que siguen los decimales, además de que en general sólo aplican reglas memorizadas sin previa reflexión (Wearne y Hiebert, 1988).

1.3.1. Principales dificultades reportadas en las investigaciones revisadas.

En síntesis, las diversas investigaciones que han estudiado el aprendizaje de los decimales coinciden en que los niños, en general, tienen dificultades para comprender las ideas relacionadas con:

- Comprensión de las escrituras con punto: Lo que implica dificultades respecto a la lectura y escritura de números y la identificación del valor posicional de las cifras.
- Relación de los decimales con la unidad.
- La equivalencia entre los distintos órdenes de la parte fraccionaria de los decimales, al no identificar equivalencia entre décimos, centésimos y milésimos.
- La comparación y el orden: Donde se incluyen los errores cometidos por los alumnos al comparar dos decimales dados y establecer orden entre ellos, incluida la identificación del cero como indicador de lugar.
- La comprensión de diversos tipos de representaciones para un número decimal y comprender así la unicidad del concepto.
- Densidad: Incluye las dificultades para comprender que en los decimales no hay antecesor ni sucesor y que entre dos decimales dados, siempre será posible introducir un tercero.
- Operaciones y cálculo: Incluyendo la tendencia a pensar que la multiplicación siempre aumentará a la cantidad inicial y que la división la hará más pequeña sin importar los números con los que se trabaje y las dificultades al utilizar dichas operaciones en la resolución de problemas.

Lo anterior fue determinante para la formulación del objetivo que guiaría la investigación.

1.4. Objetivo de la Investigación.

Una vez consideradas las principales dificultades a las que se enfrentan los estudiantes para comprender los números decimales, lo planteado en el currículo correspondiente a los últimos grados de la educación primaria y los resultados que dichos estudiantes obtienen en evaluaciones estandarizadas, se planteó el siguiente objetivo para la investigación, a fin de obtener elementos que permitan determinar el rumbo de la enseñanza de dicho contenido matemático:

- Identificar cuál es el avance en la comprensión de los alumnos de sexto grado de primaria sobre determinados aspectos de los números decimales, a partir de la formulación y puesta en práctica de una secuencia de enseñanza sobre dichos números.

Para cumplir este objetivo, nos hemos formulado los siguientes objetivos específicos:

- Diseñar una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje que refleje el proceso que, conjeturamos, siguen los estudiantes en el aprendizaje de los números decimales.
- Diseñar, a partir de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, una secuencia o experimento de enseñanza con actividades que lleven a los estudiantes a una mejor comprensión sobre determinados aspectos de los números decimales.
- Elaborar instrumentos que permitan evidenciar los conocimientos previos y finales de los estudiantes sobre los números decimales
- Identificar los cambios generados en el aprendizaje de los estudiantes y las dificultades persistentes después de la aplicación del experimento de enseñanza.

Capítulo 2.

Marco Teórico

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En el presente capítulo se hablará de las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje, explicando el concepto y en qué consiste su elaboración. Lo anterior, con el fin de justificar el diseño de la Trayectoria de Aprendizaje correspondiente a los números decimales generada para la realización del trabajo y presentada más adelante en este capítulo. Cabe mencionar que para la realización de esta investigación, de dicha metodología se tomó solamente la parte conceptual, lo que permitió la identificación de los aspectos matemáticos que habría que trabajar con los estudiantes, la selección de las tareas matemáticas, los materiales a utilizar y la forma en que se desarrollaron las sesiones de clase. Asimismo, en este capítulo se presentarán los objetivos y preguntas que guiaron la investigación.

2.1. TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE

Las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizajes (THA)[16] desarrolladas por Simon (1995) ofrecen una descripción de los aspectos claves en el proceso

[16] También reconocidas como HLT que en inglés se interpretan como Hypothetical Learning Trajectory.

de aprendizaje de los estudiantes, utilizando tareas matemáticas[17] como una herramienta para promoverlo, permitiendo la formulación de hipótesis sobre los procesos de aprendizaje de los estudiantes (Simon y Tzur, 2004).

Con las THA se pretende brindar oportunidades de aprendizaje a los estudiantes a través de la selección de tareas complejas y de alto nivel cognitivo que promuevan la capacidad de pensar, razonar y resolver problemas sobre un contenido matemático específico. Por ello, el experimento de diseño o de enseñanza, se inicia con la formulación de una THA, que consiste en definir un proceso de aprendizaje supuesto para los estudiantes, apoyado en conjeturas sobre los posibles medios para apoyar o favorecer dicho aprendizaje. En este proceso, los medios de apoyo se consideran aspectos de las prácticas matemáticas en las que el profesor y los estudiantes participan en un salón de clases, incluyen actividades de enseñanza, herramientas para la representación de las ideas matemáticas (registros y manipulativos), la naturaleza del discurso en el aula, y la organización de las actividades (Cortina, 2014).

Cabe aclarar que en la metodología de diseño de experimentos de enseñanza, las trayectorias de aprendizaje no se consideran respondientes a los procesos cognitivos autónomos por los que los estudiantes llegan a desarrollar determinada comprensión de un contenido u objeto matemático. En esta metodología se considera que las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje se encuentran más relacionadas con las situaciones sociales y culturales en las que se producen o emergen y con las condiciones en que se desarrolla la actividad y el ambiente inmediato. También considera que los medios didácticos de apoyo tienen una fuerte influencia tanto en la comprensión matemática que desarrollan los estudiantes, como en los procesos por los que la desarrollan (Cortina, 2014).

[17] Las tareas matemáticas o actividades, son consideradas clave para el aprendizaje de las matemáticas importantes. (NCTM, 2000 en Simon, 2004)

2.1.1. Construcción de las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje

En la formulación de una THA, primero se aclaran los objetivos de aprendizaje matemático y a continuación, se elige un punto de partida viable para la enseñanza. El último paso en la formulación de la THA implica el desarrollo de conjeturas sobre los principales cambios que se espera que ocurran en el aprendizaje de los estudiantes, junto con los medios que apoyen los cambios. Aclarar los objetivos de aprendizaje matemático de una THA por lo general consiste en tomar y sintetizar la literatura de investigación para identificar las ideas organizadoras centrales para el dominio del contenido abordado. (Cobb et al. 2003 citado en Cortina, 2014).

Como se apuntó antes, para crear una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, se deben plantear objetivos para el aprendizaje de los estudiantes a las cuales se quiera llegar a través de tareas o actividades matemáticas que se utilizarán con el fin de promover aprendizajes y crear las hipótesis necesarias sobre el proceso de aprendizaje de los alumnos.

Una vez que se tiene definido el objetivo respecto a los aprendizajes de los estudiantes, se direcciona la selección de las actividades de aprendizaje y las hipótesis sobre el mismo. Las tareas se seleccionan con base en las hipótesis que se tienen sobre el proceso de aprendizaje. Simon y Tzur (2004: 93) identifican los siguientes supuestos:

- *La generación de una HLT se basa en la comprensión de los conocimientos actuales de los estudiantes.*
- *Una HLT es un vehículo para la planificación del aprendizaje de determinados conceptos matemáticos.*
- *Las tareas matemáticas, que incluyen el uso de instrumentos para promover el aprendizaje de determinados conceptos matemáticos, son una parte clave del proceso de instrucción.*
- *Debido a la naturaleza hipotética e inherentemente incierta de este proceso, el profesor participa regularmente en la modificación de todos los aspectos que lo constituyen*.

Para generar una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, es necesario conocer las concepciones de los alumnos respecto a un tema o contenido específico, para tomarlo como punto de partida para la generación de las hipótesis sobre su proceso de aprendizaje y la selección o el diseño de las actividades que se propondrán para llevarlos a otro nivel de comprensión previamente propuesto.

Como ya dijimos, la generación de una THA, se inicia con la definición de las metas para el aprendizaje de los estudiantes con base en los conocimientos actuales que tienen respecto a un contenido matemático. Una vez que se tiene definida la meta de aprendizaje, se da paso a la creación de un proceso hipotético de aprendizaje en un contexto particular mediante la selección de tareas, verificando que las actividades sean accesibles a los estudiantes.

Una vez definidas las actividades y considerando las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje, se comienza a definir el propósito de cada tarea, es decir, el objetivo de cada actividad para poder reflexionar sobre la relación entre la actividad y su significado.

Uno de los mayores retos en la utilización de las THA y el diseño de las lecciones o secuencias a seguir, es la identificación de una actividad que pueda conducir al concepto previsto, tomando un concepto matemático, reconceptualizándolo y estableciendo una relación con la actividad, ya que no existe necesariamente sólo una actividad que se puede utilizar como base para la construcción de un nuevo concepto, sino que en ocasiones puede encontrarse una serie de ellas que sean útiles para tal fin (Simon y Tzur, 2004). Lo que se espera de las tareas es que lleven al alumno a tratar de encontrar explicaciones razonables respecto a un determinado contenido, y que permita identificar el avance en la comprensión del alumno, en cada punto en el proceso.

De acuerdo con Simon y Tzur (2004), el uso más importante de las THA se encuentra en que son útiles en la enseñanza de conceptos cuyo aprendizaje es problemático en general o para determinados alumnos. Esta metodología se ha utilizado para hacer contribuciones sobre el desarrollo de la comprensión de determinados conceptos matemáticos como las fracciones, además, esta elaboración puede proporcionar un marco explícito para la generación y modificación de las tareas de enseñanza.

En el caso que abordo en este trabajo, el aprendizaje de los números decimales se ha reportado como un concepto que presenta dificultades para los alumnos, por lo que se pretende generar una trayectoria que contribuya a una adecuada comprensión de dichos números.

2.1.2 Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para los Números Decimales

Para el desarrollo de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje de los Números Decimales, como ya dijimos, hemos tomado como base los resultados relacionados con: a) las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes y b) la comprensión de ideas más amplias y complejas respecto a dicho contenido matemático reportadas en recientes investigaciones, las cuales se describieron en el capítulo uno.

En la trayectoria hipotética de aprendizaje formulada (Figura 2.1), se marca el camino hipotético que consideramos, siguen los estudiantes en la comprensión de los números decimales.

Figura 2.1 Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para los números decimales.

- Se inicia con la comprensión de las escrituras con punto, aspecto en el que se consideran la lectura y escritura de dichos números y la identificación del valor posicional de las cifras.

- La relación con la unidad que mantienen los números decimales al igual que todos los racionales, ya que su valor deriva de esa relación con la unidad, la cual no siempre es identificada y mantenida en la memoria de los estudiantes.

- El reconocimiento de las equivalencias entre los distintos órdenes de la parte fraccionaria de los números (décimos, centésimos y milésimos).

- La identificación de propiedades de los decimales que los lleven a comparar dos números y poder establecer orden entre ellos.

- El reconocimiento de diversas formas para representar un número decimal (como lo son las expresiones con punto, las fracciones decimales y con denominadores distintos de 10, 100 y 1000, las representaciones en superficies o áreas fraccionadas y su ubicación como puntos en la recta).

- El acercamiento a la propiedad de densidad, aspecto en el que se requiere de los estudiantes un mayor razonamiento por la complejidad misma de esa propiedad.

- Finalmente se coloca el aspecto de cálculo y operaciones, no porque se considere que representa mayor dificultad para su comprensión que los aspectos anteriormente mencionados, sino debido a que se optó por trabajarlos una vez que los estudiantes tuviesen una mejor compresión de dichos números. Este aspecto se coloca en última instancia debido a que se consideran no sólo la resolución de operaciones aisladas, sino en el marco de la resolución de problemas.

En la trayectoria anteriormente presentada, se encuentran implícitos nuevos retos y precisiones respecto al conocimiento matemático vinculado a los números decimales que los estudiantes pueden aprender, por lo que en esta investigación se consideró que para acceder con menores dificultades a un determinado aspecto, es recomendable que el estudiante conozca y domine el aspecto anterior, lo cual le permitiría comprenderlo con mayor facilidad y amplitud, sin embargo, existe la posibilidad de que haya estudiantes que presenten variaciones en este proceso.

2.2. Preguntas de Investigación

Considerando el objetivo de esta investigación, los referentes teóricos antes mencionados, el diseño de la trayectoria de aprendizaje y los conocimientos que se tienen sobre el aprendizaje de los estudiantes respecto al contenido matemático de los números decimales, generamos la pregunta de investigación siguiente:

- ¿Cómo los estudiantes de sexto grado de primaria, modifican su comprensión de los números decimales a partir de la aplicación de una secuencia o experimento de enseñanza para el aprendizaje de dichos números?

Para dar respuesta a esta pregunta, se generaron otras que contribuirán a la búsqueda de respuestas más específicas y precisas, una vez que se hubo aplicado el experimento de enseñanza con los estudiantes.

- ¿Cuáles fueron las modificaciones o cambios que hubo en el aprendizaje de los estudiantes de sexto grado sobre los números decimales, a partir de la intervención diseñada con el fin de mejorar la comprensión de estos números?

- ¿Cómo se produjeron esos cambios?, ¿qué los generó o favoreció?
- ¿Qué dificultades persisten en los estudiantes, después de la realización de las actividades del experimento de enseñanza?

Capítulo 3.

Método

CAPÍTULO 3. MÉTODO

En el presente capítulo se mencionan el contexto y los participantes con los que se llevó acabo esta investigación, se hace una descripción de los elementos que se consideraron para el proceso de diseño del experimento de enseñanza, la selección de actividades o tareas que lo conforman, el proceso que se siguió para su puesta en práctica, así como las bases en las cuales se sustenta el diseño. Asimismo, se describen a grandes rasgos las actividades planteadas a los estudiantes en las distintas sesiones de trabajo para llevarlos a una mayor comprensión de los números decimales.

Finalmente, se mencionan cuáles fueron los datos que se recopilaron durante el proceso de investigación y la forma en que se llevó a cabo el análisis de los mismos.

3.1. Participantes y contexto

En esta investigación participaron 34 alumnos de primaria, 20 mujeres y 14 hombres en edades comprendidas entre 11 y 12 años cuyas familias son de un nivel socioeconómico medio-bajo. El nivel de escolaridad de los padres de familia varía entre los niveles de secundaria y preparatoria, siendo minoría los que poseen estudios de nivel licenciatura.

La escuela de los participantes está situada al oriente del Distrito Federal, muy cerca del Estado de México. Desde que en México se inició la aplicación de la prueba ENLACE, dicha escuela no ha sobresalido en los resultados obtenidos. En el área de matemáticas, en la evaluación realizada en el año 2012, obtuvo un puntaje de 537 de los 800 puntos que incluye la prueba *(Anexo 2)*, estando aún lejos de alcanzar los 600 puntos que en el Distrito Federal se han puesto como logro mínimo.

3.2. Diseño del experimento de enseñanza

Confrey & Lachance (2000) proponen un modelo de diseño de investigación que considera las condiciones en el aula con el fin de crear e investigar sobre nuevas estrategias de enseñanza. Las estrategias desarrolladas a través de este diseño pretenden cambiar o reformar drásticamente las prácticas de enseñanza actuales. El diseño se denomina *transformación y experimentos de enseñanza basados en conjeturas*, y pretende instituir cambios positivos significativos mediante el establecimiento de una mejor conexión entre la investigación y la práctica. Este modelo es el que nos permitió diseñar la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje de los números decimales y el experimento de enseñanza cuyo objetivo es promover y verificar la progresión en el conocimiento sobre los números decimales en alumnos de sexto grado.

- **Las conjeturas.**

Las conjeturas constituyen una parte importante dentro del experimento de enseñanza. Confrey & Lachance (2000) refieren que son inferencias basadas en evidencias incompletas, precisando que en el contexto de la educación matemática, estas inferencias pueden referirse a la forma en que se deben organizar o conceptualizar las matemáticas con fines educativos. Por lo tanto, *la conjetura es un medio para reconceptualizar la forma en que [los estudiantes] se acercan al contenido y la pedagogía de un conjunto de temas de matemáticas.* (p. 235)

Una conjetura debe ayudar a enfocar la perspectiva en aspectos nuevos que pudieran ser considerados insignificantes o desconcertantes, pero que son claves en la evolución del pensamiento de los estudiantes, por ello es que son esenciales para la investigación.

Las conjeturas tienen dos dimensiones importantes:

- Una dimensión de contenido matemático que dé lugar a la introducción de los conceptos.
- Una dimensión pedagógica vinculada al contenido que responde a la pregunta: ¿Cómo se debe enseñar este contenido? Y que servirá de guía al investigador acerca de cómo debe organizar la instrucción en el aula, seleccionando el tipo de tareas, actividades y recursos que les requieren para dicho contenido (Confrey & Lachance, 2000).

Una conjetura está necesariamente situada en una teoría. El aspecto teórico particular de la conjetura sirve para estructurar las actividades y metodologías en el experimento de la enseñanza.

En una situación de enseñanza, las construcciones matemáticas son influenciadas por las condiciones que estimulen a los niños a la acción, así como las experiencias y conocimientos que los niños traen a esas acciones.

Retomando estos aspectos en nuestra investigación, podemos encontrar que las conjeturas de las que partimos, están plasmadas en el diseño de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje propuesta para el aprendizaje de los números decimales, ya que en ella se organizaron los conocimientos que se espera lleguen a poseer los estudiantes en distintos momentos del proceso de dotación de significado de los números decimales. Esas conjeturas, fueron el punto de partida para el diseño del experimento de enseñanza y la selección de las actividades que éste incluía para evidenciar los cambios en el proceso de aprendizaje de los estudiantes sobre estos números. Las conjeturas permiten determinar los momentos en que es pertinente introducir nuevas nociones o conceptos relacionados con el contenido matemático ya mencionado a través del uso de diversos materiales o tareas propuestas, elegidas con un fin específico que corresponde al experimento de enseñanza.

- **El experimento de enseñanza.**

Un experimento de enseñanza (Confrey & Lachance 2000) es una intervención planificada que tiene lugar durante un período de tiempo significativo en un aula donde se imparte un curso de continua instrucción. El experimento consiste en una relación dialéctica entre la conjetura y los componentes de la instrucción, que son:

a) El currículum.
b) El método de instrucción.
c) El rol del profesor y
d) El método de valoración.

Siguiendo el modelo de Confrey & Lachance (2000), la conjetura es la fuerza impulsora en este modelo de diseño de investigación ya que permite definir con exactitud las preguntas que se explorarán con el experimento de enseñanza, mismo que se trabaja con un grupo de estudiantes durante un tiempo determinado con el fin de explorar los aspectos planteados en la conjetura.

En nuestra investigación, el experimento de enseñanza estuvo formado por 11 sesiones. La primera y última sesiones fueron dedicadas a la aplicación de un cuestionario diagnóstico y de evaluación respectivamente, con el objetivo de identificar la comprensión que tenían los estudiantes sobre los números decimales y el progreso que se tuvo a lo largo del periodo de instrucción. En las nueve sesiones restantes se desarrollaron distintos aspectos sobre los números decimales a través de actividades diseñadas con el objetivo de ayudar a los estudiantes a superar las dificultades respecto a su comprensión.

Para el diseño de las sesiones de instrucción se consideraron los cuatro componentes antes mencionados:

a) El currículum. Se consideró para tomar el parámetro de lo que se espera que los estudiantes aprendan respecto a los decimales al culminar el sexto grado de educación primaria, sin embargo este no fue considerado como un limitante respecto a los avances que pudieran mostrar los alumnos en el desarrollo de las sesiones de instrucción.

b) El método de instrucción. La dinámica que se llevó a cabo consistió en presentar a los alumnos, integrados en equipos de 4 a 6 estudiantes, actividades que debían realizar siguiendo la estrategia que ellos consideraran pertinente.

c) El rol del profesor. En nuestra investigación, este rol fue asumido por la investigadora, ya que fue éste quien llevó a cabo la enseñanza con los estudiantes. Su actividad consistió en proponer la tarea, dar las instrucciones necesarias y monitorear a los equipos durante el tiempo de resolución; a fin de identificar el proceso de solución empleado y considerando que en diferentes momentos de cada actividad se sostuvieron discusiones con todo el grupo.

   En diversos momentos del desarrollo de las sesiones, con el fin de obtener mayores argumentos que permitieran comprender el tipo de razonamientos que realizaban los alumnos en determinadas situaciones, o promover otro tipo de reflexiones e ideas, se introdujeron contraargumentos como “El otro día, un alumno con el que trabajé me dijo que…”, ello permitía que los estudiantes consideraran otro tipo de razonamientos con los cuales confrontar sus argumentos, a la vez que les brindaba confianza de poder cuestionar los comentarios de un igual, situación que pocas veces sucede cuando se trata de la palabra del profesor.

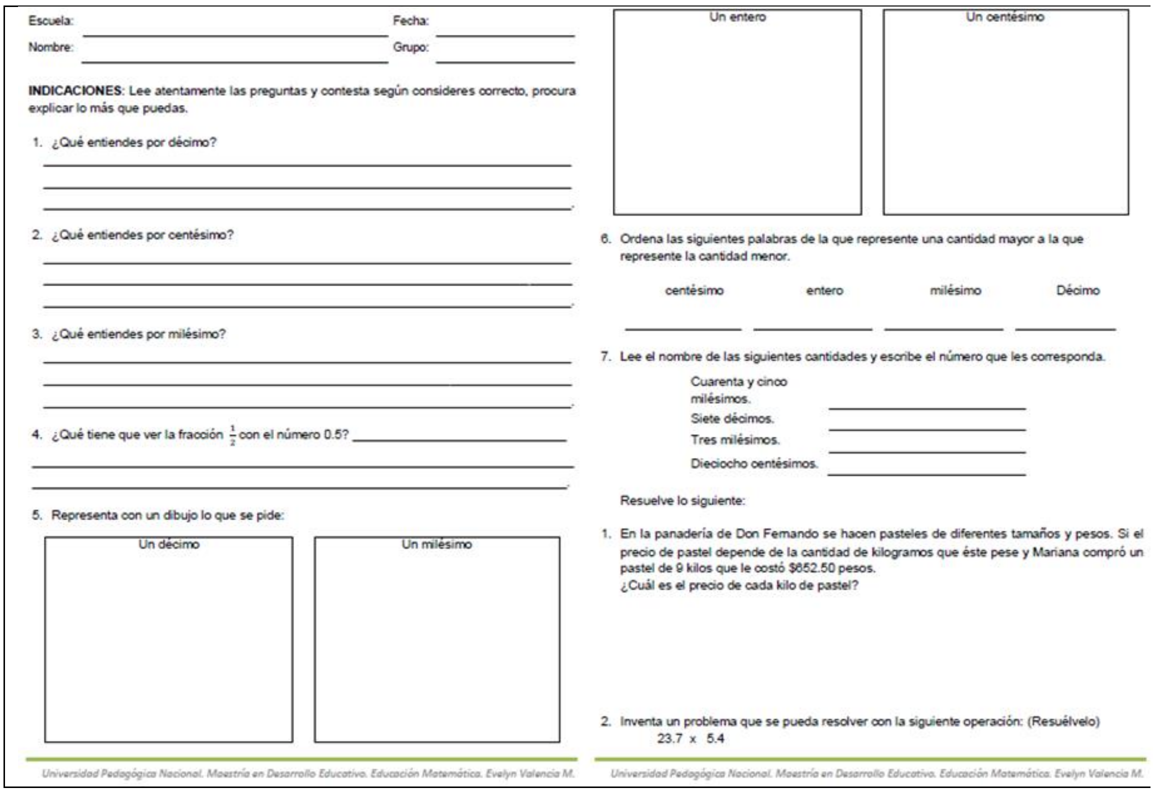
d) El método de valoración. Una vez terminada la actividad, los alumnos exponían sus argumentos, cuestionándoles sobre los mismos, a fin de indagar sobre los razonamientos utilizados al desarrollar la actividad o resolver el problema, y las dificultades que esta resolución les había planteado. En ocasiones se culminaba la actividad con un ejercicio individual para evaluar los aprendizajes de esa sesión, sin embargo, en todas las sesiones, los estudiantes eran los encargados de validar las respuestas o procedimientos de sus compañeros, evitándose en general, que la palabra del investigador fuera la que prevaleciera.

3.2.1. Cuestionario diagnóstico

El diagnóstico del grupo se realizó mediante la aplicación de un cuestionario *(Anexo 3)*. Éste estaba formado por 9 preguntas (Figura 3.1) a través de las cuales se solicitaba a los alumnos que expresaran sus ideas respecto a:

- Décimo, centésimo y milésimo.
- Representación gráfica de la unidad, décimo, centésimo y milésimo.
- Orden entre décimo, centésimo, milésimo y unidad.
- Si hay o no relación entre los números con punto y las fracciones.
- Escritura de los nombres de los números y/o de los números a partir del nombre.
- Resolución y formulación de problemas con decimales.

Dichos aspectos se eligieron con el objetivo de identificar cuáles eran las dificultades básicas que tenían los alumnos, para poder tomarlas como punto de partida para el diseño de las sesiones de instrucción y para verificar si las principales dificultades reportadas en investigaciones recientes, se confirmaban en los estudiantes participantes en el desarrollo de la investigación.



Escuela: Fecha:
Nombre: Grupo:

INDICACIONES: Lee atentamente las preguntas y contesta según consideres correcto, procura explicar lo más que puedas.

1. ¿Qué entiendes por décimo?
2. ¿Qué entiendes por centésimo?
3. ¿Qué entiendes por milésimo?
4. ¿Qué tiene que ver la fracción $\frac{1}{2}$ con el número 0.5?
5. Representa con un dibujo lo que se pide:

Un décimo Un milésimo Un entero Un centésimo

6. Ordena las siguientes palabras de la que represente una cantidad mayor a la que represente la cantidad menor.

centésimo entero milésimo Décimo

7. Lee el nombre de las siguientes cantidades y escribe el número que les corresponda.

Cuarenta y cinco milésimos.
Siete décimos.
Tres milésimos.
Dieciocho centésimos.

Resuelve lo siguiente:

1. En la panadería de Don Fernando se hacen pasteles de diferentes tamaños y pesos. Si el precio de pastel depende de la cantidad de kilogramos que éste pese y Mariana compró un pastel de 9 kilos que le costó $652.50 pesos. ¿Cuál es el precio de cada kilo de pastel?
2. Inventa un problema que se pueda resolver con la siguiente operación: (Resuélvelo) 23.7 x 5.4

Universidad Pedagógica Nacional. Maestría en Desarrollo Educativo. Educación Matemática. Evelyn Valencia M.
Universidad Pedagógica Nacional. Maestría en Desarrollo Educativo. Educación Matemática. Evelyn Valencia M.

Figura3.1 Cuestionario diagnóstico

En dicho cuestionario no se incluyen todos los aspectos marcados en la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para los números decimales. Solo se tomó como referente para obtener una idea sobre los conocimientos básicos de los estudiantes en relación a estos números, complementando así lo que las investigaciones han reportado recurrentemente.

3.2.2. Sesiones

Una vez identificadas las dificultades más comunes que presentaron los alumnos para comprender los números decimales, se planificaron nueve sesiones de 60 o 90 minutos de duración en las que se desarrollaron los siguientes aspectos:

1. Comprensión de las escrituras con punto.
2. Relación de los decimales con la unidad.
3. Equivalencia entre distintos órdenes de la parte fraccionaria de los números decimales.
4. Comparación y orden entre los decimales
5. Distintas representaciones de los decimales.
6. Introducción a la noción de densidad
7. Multiplicación y división con decimales
8. Resolución de problemas con decimales

El objetivo de estas sesiones fue generar nuevos conocimientos y razonamientos en los estudiantes, de tal forma que les permitieran alcanzar una mayor comprensión del contenido matemático abordado, tanto a nivel cognitivo como práctico.

Para el diseño del experimento de enseñanza se consideraron seis aspectos principales en los que se pretende mejorar la comprensión de los estudiantes, los cuales van acordes a lo planteado en la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para los números decimales.

El desarrollo de estos contenidos se realizó a través de distintas actividades que hacían referencia a diversos aspectos mostrados en la figura 3.2.

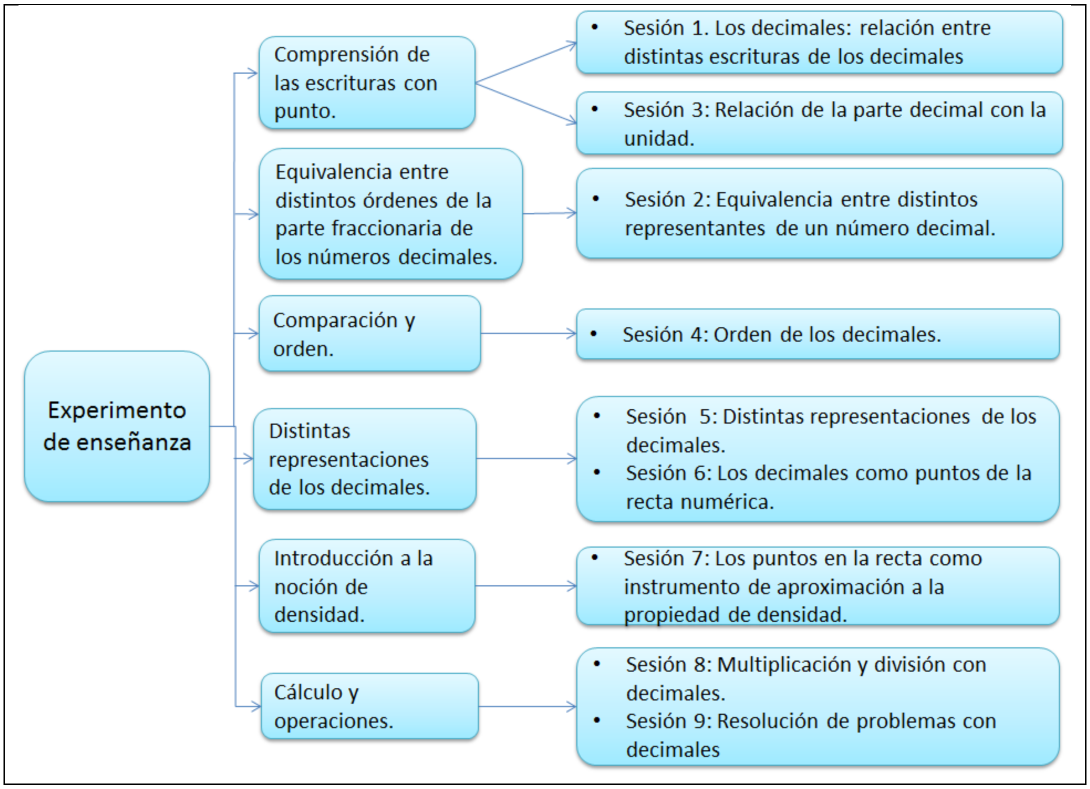


Figura 3.2 Organización de las actividades por aspectos y sesiones.

3.2.2.1. Descripción de las sesiones.

A continuación, se describen brevemente las sesiones planteadas que derivan de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje formulada para el aprendizaje de los números decimales y las tareas realizadas en cada una de ellas así como el objetivo que se pretende lograr con su aplicación. Se organizan según los ámbitos presentados en la figura 3.2.

3.2.2.1.1. Comprensión de las escrituras con punto.

Sesión 1. Los decimales: relación entre distintas escrituras de los decimales.

En esta sesión, para trabajar distintas escrituras para los números decimales y la relación entre ellas, se plantearon tres actividades (Figura 3.3) con los siguientes objetivos:

a) Identificar las ideas bajo las cuales los alumnos relacionan las distintas escrituras de los números decimales: fracción, expresión con punto y lenguaje natural.

b) Identificar las dificultades que tienen al escribir los nombres de los números.

Actividad 1 Observa las respuestas que dieron algunos de tus compañeros al solicitarles representar con número una cantidad decimal dada e indica si son correctas o no, argumenta por qué.

Cantidad dada	Alum. 1	Alum. 2	Alum. 3	Alum. 4	Alum. 5	Alum. 6
Cuarenta y cinco milésimos	$\frac{45}{1000}$	45.1000	.45	0.045	0.45	48 ml
Siete décimos	$\frac{7}{10}$	7.10	.7	0.7	0.7	7 dm
Tres milésimos	$\frac{3}{1000}$	3.1000	.3	0.003	00.3	3 ml

Actividad 2 Observa las siguientes tarjetas y relaciona una tarjeta con número con otra que tenga su nombre según consideres.

0.030	treinta milésimos
0.8	ocho décimos
0.15	quince centésimos
0.060	seis centésimos
0.015	quince milésimos

0.008	ocho milésimos
0.30	treinta centésimos
0.6	Seis décimos
0.2	dos décimos

Actividad 3 Resuelve los siguientes ejercicios:

INDICACIONES: Lee el nombre de las siguientes cantidades y escribe el número que les corresponda.

1. Dieciséis milésimos. __________
2. Cuatro décimos. __________
3. Treinta y nueve centésimos. __________
4. Veintitrés décimos. __________
5. Doscientos cuatro milésimos. __________
6. Siete centésimos. __________
7. Nueve milésimos. __________

Observa las siguientes cantidades y escribe su nombre con letra.

0.008 ____________________
0.9 ____________________
0.012 ____________________
0.04 ____________________
2.4 __________ décimos.
0.381 ____________________
0.63 ____________________

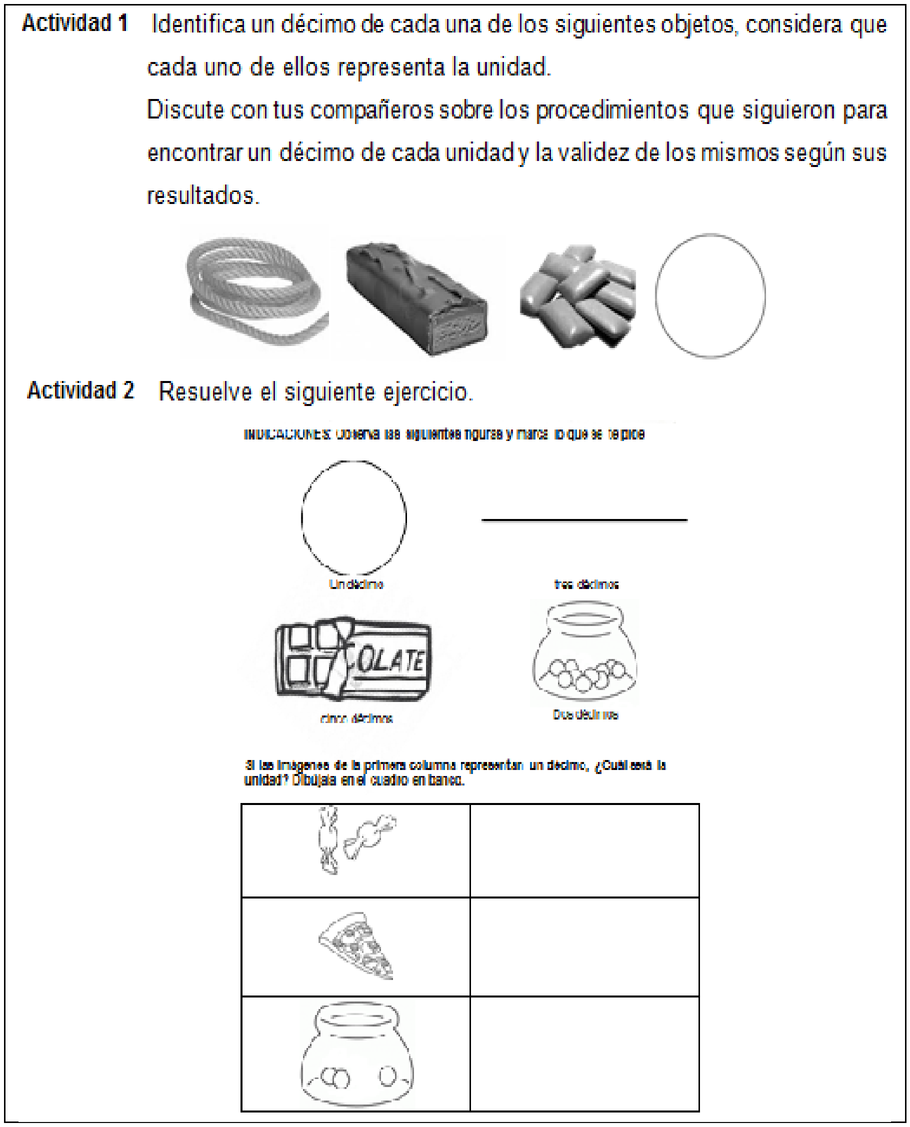
Figura 3.3. Actividades planteadas en la sesión 1

Sesión 3. Relación de la parte decimal con la unidad.

En esta sesión se trabajó la relación de los décimos, centésimos y milésimos con la unidad, que es uno de los aspectos primordiales para la comprensión de dichos números. Esto, en un primer momento no se había identificado como una dificultad para los estudiantes. La dificultad surgió a lo largo de las sesiones.

Es por ello que para trabajar el significado de los números decimales como subconjunto de un conjunto de objetos discretos y como puntos de una recta, se plantearon dos actividades (Figura 3.4) con el siguiente objetivo:

a) Promover la comprensión del décimo, centésimo y milésimo como subconjunto de un conjunto y como puntos de una recta así como la identificación de la unidad.



Actividad 1 Identifica un décimo de cada una de los siguientes objetos, considera que cada uno de ellos representa la unidad.

Discute con tus compañeros sobre los procedimientos que siguieron para encontrar un décimo de cada unidad y la validez de los mismos según sus resultados.

Actividad 2 Resuelve el siguiente ejercicio.

INDICACIONES: Observa las siguientes figuras y marca lo que se te pide

Un décimo

tres décimos

cinco décimos

Dos décimos

Si las imágenes de la primera columna representan un décimo, ¿Cuál será la unidad? Dibújala en el cuadro en blanco.

Figura 3.4. Actividades planteadas en la sesión 3

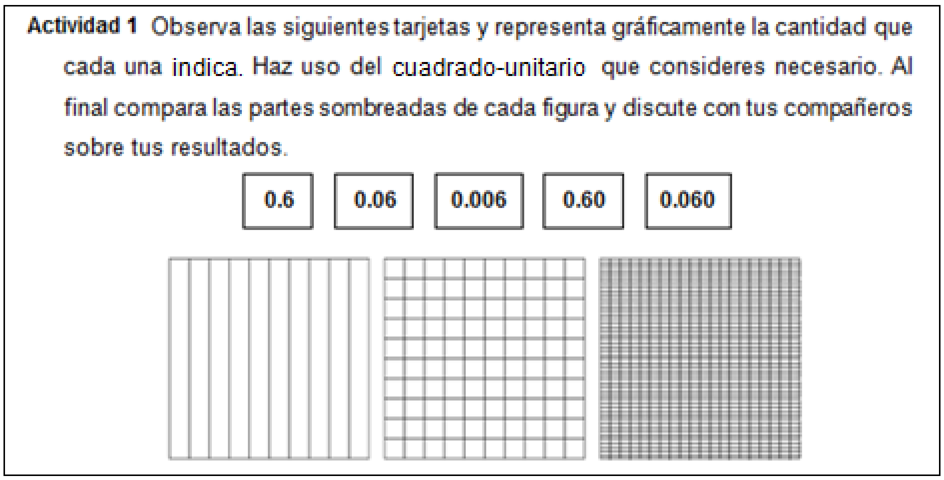
3.2.2.1.2. Equivalencia entre distintos órdenes de la parte fraccionaria de los números decimales.

Sesión 2. Equivalencia entre distintos representantes de un número decimal.

En esta sesión, para trabajar la equivalencia entre los distintos representantes de un mismo número decimal se planteó una actividad (Figura 3.5) que tenía como objetivo:

a) Identificar las nociones que poseen los alumnos sobre la equivalencia entre decimales de distinto orden, así como los razonamientos que los llevan a establecer dicha equivalencia.

b) Promover el uso del cuadrado unitario, (representación a través del área de una figura), como herramienta para favorecer la identificación de las equivalencias entre decimales.


Actividad 1 Observa las siguientes tarjetas y representa gráficamente la cantidad que cada una indica. Haz uso del cuadrado-unitario que consideres necesario. Al final compara las partes sombreadas de cada figura y discute con tus compañeros sobre tus resultados.

0.6 0.06 0.006 0.60 0.060

Figura 3.5. Actividad planteada en la sesión 2

3.2.2.1.3. Comparación y orden.

Sesión 4. Orden de los decimales.

En esta sesión, para establecer la relación que existe entre el “tamaño” de distintos números decimales, es decir, para comparar y determinar si uno de ellos es menor que, igual a, o mayor que otro (relación de orden), se plantearon tres actividades (Figura 3.6) con los siguientes objetivos:

a) Identificar la lógica que siguen los alumnos al ordenar los números decimales.

b) Observar las estrategias que utilizan y promover la reflexión sobre la validez y/o pertinencia de las mismas.

c) Promover el uso del cuadrado unitario, como herramienta para la comparación de diversas cantidades.

Actividad 1 Ordena las siguientes tarjetas del número menor al mayor.

5.4	5.931	5.001	5.64	5.02

Actividad 2 Compara con tus resultados con los de otros equipos y verifiquen sus respuestas representando la parte decimal de cada cantidad, en los cuadrados unitarios.

Actividad 3 Ordena las siguientes cantidades de menor a mayor utilizando la estrategia que desees.

7.3	7.08	7.009	7.15	7.238

Escucha los argumentos dados por otros niños respecto a lo que hacen al ordenar ciertos números y comenta si son válidos y útiles sus argumentos y por qué.

Figura 3.6. Actividades planteadas en la sesión 4

3.2.2.1.4. Representaciones de los decimales.

Sesión 5. Diferentes representaciones de los decimales.

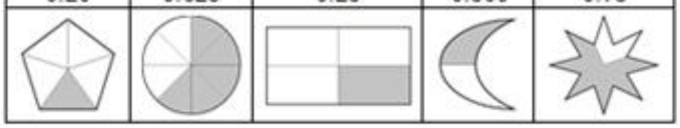
Para ampliar en los estudiantes las ideas respecto a las formas de representar un decimal, en esta sesión se trabajó nuevamente la relación existente entre las distintas representaciones de los números decimales. En este caso, entre la representación decimal (con punto), la gráfica en superficies distintas al cuadrado y la fraccionaria, a partir de tres actividades (Figura 3.7) con los siguientes objetivos:

a) Identificar las estrategias y/o razonamientos que siguen los alumnos para establecer la equivalencia entre la representación en superficie fraccionada y la expresión decimal de un número.

b) Promover en los estudiantes el reconocimiento de diferentes formas en que puede representarse un número decimal.

Actividad 1 Observa las siguientes tarjetas y relaciona las tarjetas de los números decimales con las que tengan su equivalente en la representación en una superficie fraccionada si es que las hay. Posteriormente discute con tus compañeros sobre las estrategias utilizadas.

0.20	0.625	0.25	0.500	0.75



Actividad 2 Observa las nuevas tarjetas y relaciónalas con las tarjetas que ya tenías si es que son equivalentes.

$\frac{3}{15}$	$\frac{15}{24}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{6}{8}$

Discute con tus compañeros si es que hay más formas de representar un número decimal.

Actividad 3 Observa la siguiente tabla y representa de tres formas distintas a los números de la primera columna.

0.4			
0.5			
0.125			
0.375			
0.600			

Figura 3.7. Actividades correspondientes a las sesión 5.

Sesión 6. Los decimales como puntos de la recta numérica

En esta sesión se retomaron los decimales como puntos de la recta para profundizar en las distintas formas de representar a un decimal y como antecedente al trabajo con la noción de densidad: se hizo a partir de cuatro actividades (Figura 3.8) que tenían los siguientes objetivos:

a) Promover en los estudiantes el uso de la idea del orden de los decimales y de equivalencias entre éstos, para ubicar el lugar que le corresponde a un número en la recta numérica.

b) Identificar las principales dificultades a las que se enfrentan los alumnos al determinar el segmento de la recta numérica en que se ubican algunos decimales dados.

c) Verificar cuáles son las dificultades que persisten en los alumnos al comparar y ordenar decimales.

Actividad 1 Observa las siguientes tarjetas y ubícalas en el lugar que les corresponde en la recta numérica (dividida en centésimos). Compara y discute sobre tus resultados con tus compañeros.

4.10	4.68	4.7	4.356	4.93

Actividad 2 Agrega las siguientes tarjetas a la recta. Puedes modificar la ubicación de las que ya habías colocado.

5.001	5.02	5.4	5.64	5.931

Actividad 3 Determina el rango de la recta que necesitas para ubicar las siguientes cantidades y colócalas en el lugar correspondiente.

0.09	0.4	0.250	0.680	0.75
1.08	1.1	1.30	1.550	1.90

Actividad 4 Ubica las siguientes cantidades en la recta numérica. (En ésta ya se encontraba marcada el cero, al centro la unidad y en el otro extremo la segunda unidad).

0.06	0.300	0.75	1.009	1.30

Figura 3.8 Actividades planteadas en la sesión 6.

3.2.2.1.5. Los puntos de la recta como instrumento de acercamiento a la propiedad de densidad.

Sesión 7. Los puntos de la recta como instrumento para la aproximación a la propiedad de densidad.

Para iniciar un acercamiento de la propiedad de densidad de los números racionales y por consiguiente de los decimales a través de la representación en la recta numérica, se plantearon dos actividades (Figura 3.9) con el siguiente objetivo:

a) Promover en los alumnos un acercamiento a la propiedad de densidad de $\mathbb{Q}$ (los números racionales) a través del uso de la recta numérica y la ubicación de distintos números decimales entre otros dos, representados mediante su expresión con punto y fraccionaria.

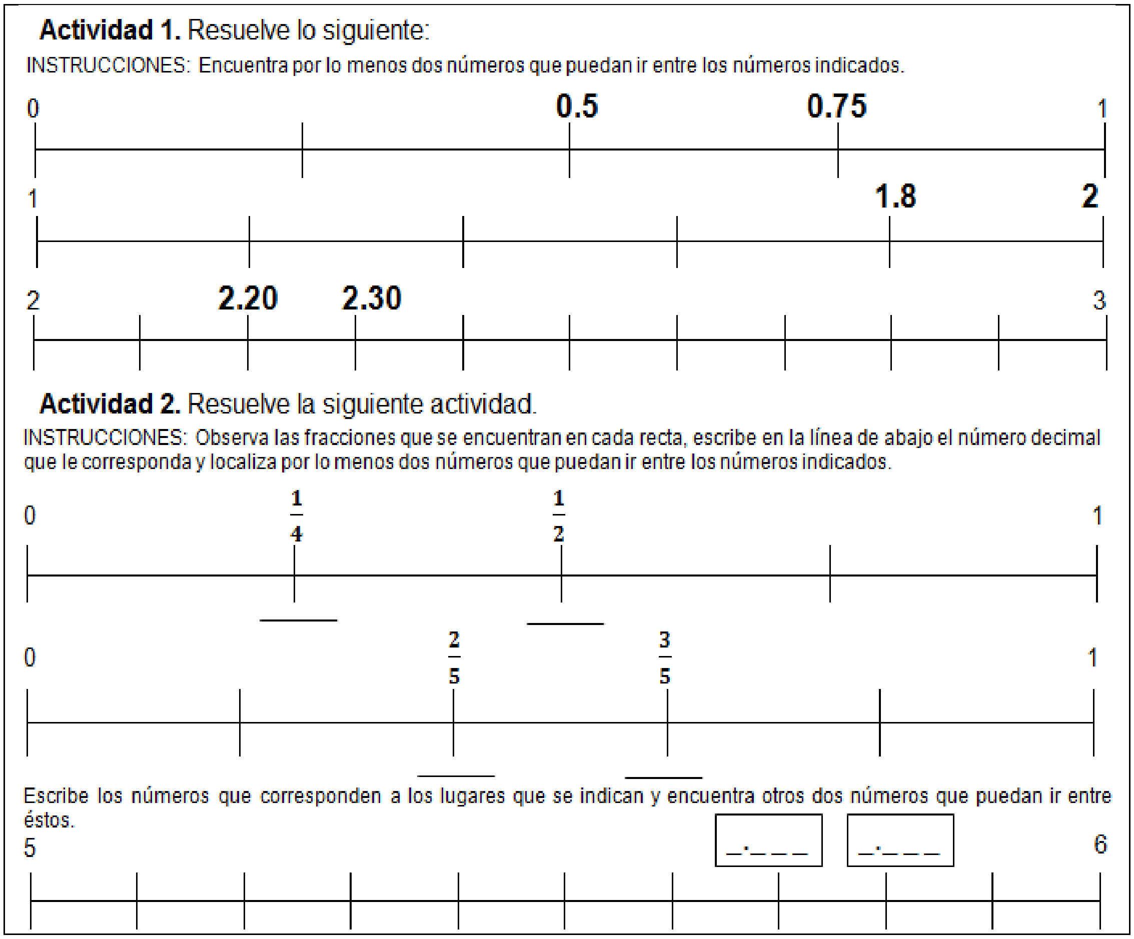


Figura 3.9. Actividades correspondientes a la sesión 7.

3.2.2.1.6. Cálculo y operaciones.

Sesión 8. Multiplicación y división con decimales.

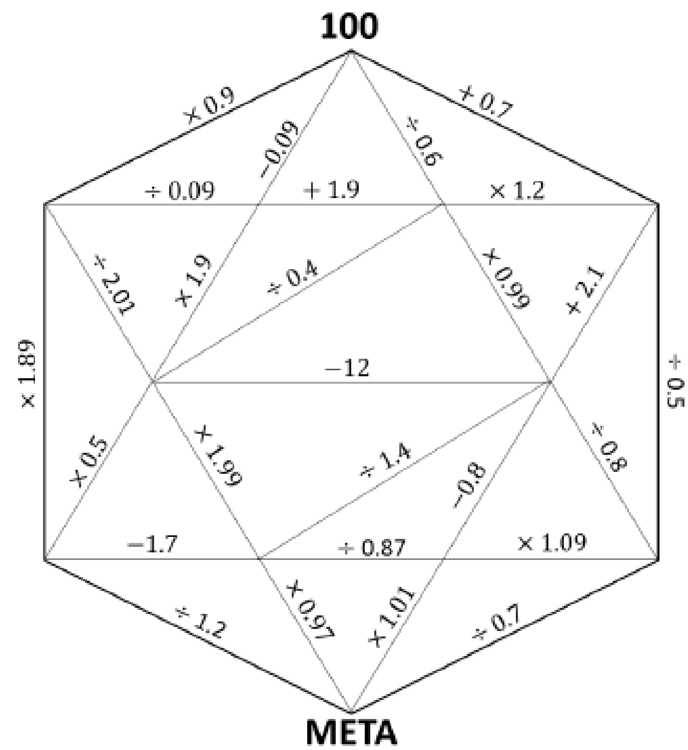
Para hacer reflexionar sobre las ideas de la mayoría de los alumnos en relación a que la multiplicación siempre hace más grande un número y la división siempre lo hará más pequeño, en esta sesión se trabajó la multiplicación y división con números decimales, a través de sus expresiones con punto. Para ello se planteó una actividad (Figura 3.10) con el siguiente objetivo:

a) Evidenciar cuáles son las ideas de los alumnos al operar con números decimales, en específico, al realizar multiplicaciones y divisiones con decimales (en la idea de que la multiplicación siempre agranda y la división siempre hace más pequeño un número), promoviendo la reflexión y favoreciendo la ruptura de esta idea.

LA TELARAÑA DE LOS DECIMALES

INDICACIONES:

1. Sin hacer cálculos, elige el camino que consideres te dará más puntos y márcalo con algún color. Las reglas son las siguientes:
   a. Al empezar el juego tienes 100 puntos
   b. Debes llegar a la meta siguiendo el camino de las operaciones que pienses que te darán más puntos.
   c. No debes pasar dos veces por el mismo segmento ni por el mismo punto.



2. Haz los cálculos del camino que elegiste para obtener tu total. Puedes utilizar una calculadora.
3. Compara tus resultados con los de tus compañeros y comenten lo que observan.

Figura 3.10. Actividad presentada en la sesión 8

Sesión 9. Resolución de problemas con decimales.

Ya que el uso de los números decimales en la resolución de problemas requiere más que la aplicación de los algoritmos convencionales, pues implica un análisis más profundo respecto a las características propias de los decimales y los ámbitos en los que éstos se pueden utilizar, en esta sesión se plantearon dos actividades (Figura 3.11) con los siguientes objetivos:

a) Promover en los alumnos la reflexión sobre los contextos en los que es viable utilizar los decimales

b) Identificar las principales dificultades que tienen los estudiantes al operar con decimales.

c) Identificar el tipo de problemas que formulan y los contextos que utilizan los estudiantes para aplicar operaciones con decimales.

Actividad 1 Lee atentamente los siguientes problemas e identifica si se pueden resolver. Discute con tus compañeros sobre tus afirmaciones.

1.- Enrique tiene 36.3 estampas y ganó 12.8 más. ¿Cuántas estampas tiene en total?	7.- Andrea tenía 26.5 crayones y su amiga Sandra le regaló 5.4 más. ¿Cuántos crayones tiene Andrea?
2.- María tiene un pastel de 3.5 kg. que quiere repartir entre 14 personas. ¿Cuántas rebanadas de pastel le tocará a cada invitado?	8.- Para el día del niño, en la escuela se compraron 423.7 pelotas y se repartieron 398.8. ¿Cuántas pelotas sobraron?
3.- Toño tenía muchas canicas así que las ordenó en bolsitas con 12.5 canicas cada una. Si llenó 15 bolsas. ¿Cuántas canicas tenía?	9.- En la feria, Carlos ganó 3.5 juguetes y un bono que multiplicaba sus regalos por 2.5. ¿Cuántos juguetes ganó en total?
4.- Para una fiesta se compraron 14 kg. de pollo, si los metieron en cajas de 3.5 kg. ¿Cuántas cajas se llenaron?	10.- Don José tiene tres parcelas, una de 262.5 m^2, otra de 353.8 m^2 y la última de 275.4 m^2. ¿Cuánto miden en total las parcelas de Don José?
5.- Un cocinero compró 15.7 kg. de pescado y cocinó 9.9 kg. ¿Cuántos kilos de pescado le sobraron?	11.- Areli tiene un rollo con 120 metros de listón, si quiere hacer moños de 1.5 m. ¿Cuántos moños hará?
6.- Para su fiesta, Laura compró 75 paletas de hielo que costaba $3.80 cada una ¿Cuánto pagó?	12.- Marcos llenó 135 botellas con 0.9 litros de leche cada una. ¿Cuántos litros de leche utilizó para llenar las botellas?

Actividad 2 Escribe un problema para cada una de las siguientes operaciones y resuélvelo.

14 x 7.5	125.3 + 303.09	293.4 – 71.8	42 ÷ 3.8

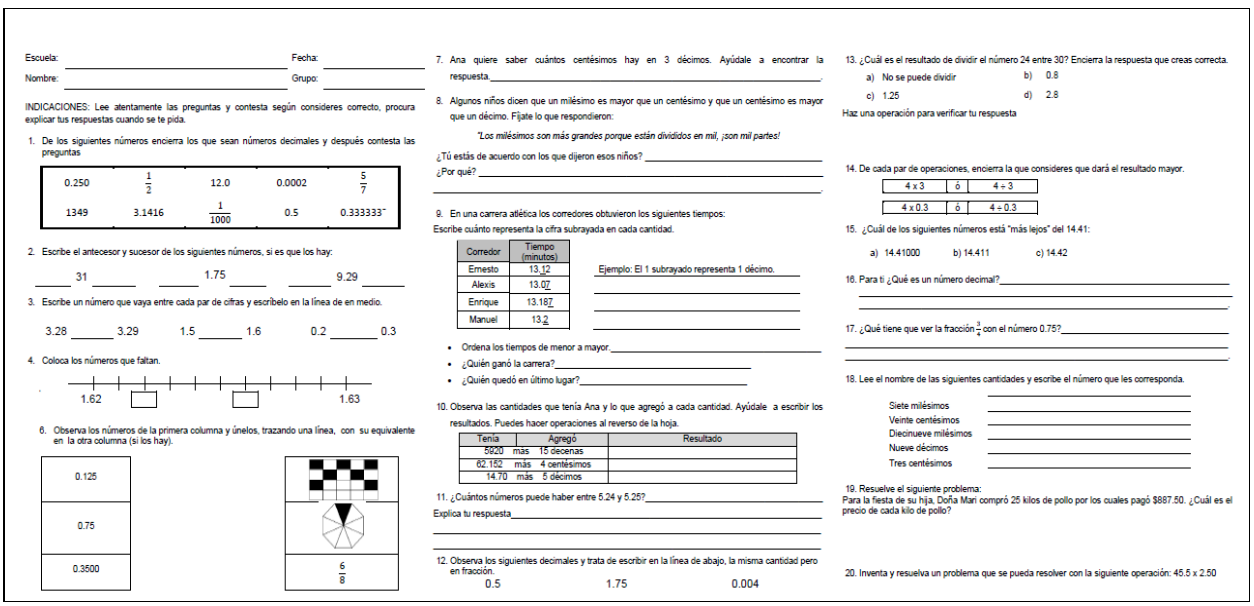
Figura 3.11. Actividades presentadas en la sesión 9

En esta actividad, la selección de los problemas estuvo orientada a incluir diversidad de contextos en los que se aplican los números decimales, algunos de ellos pertinentes como en el caso de los problemas donde se manejan áreas, pesos y medidas, y otros en los que su uso no es viable como lo son en el manejo de estampas, crayones, personas, juguetes, etc. La intención era verificar si los alumnos consideran el contexto del problema como un factor determinante para encontrar solución al mismo, o si solamente se remiten a la aplicación de un algoritmo que les permita emplear las cantidades mencionadas en el problema.

3.2.3. Cuestionario final

Con la finalidad de verificar el avance logrado por los estudiantes al finalizar el periodo de instrucción, se aplicó un cuestionario final *(Anexo 4)* que consistió en una serie de 19 preguntas (Figura 3.12) que abarcaron los siguientes aspectos:

- Orden entre decimales.
- Equivalencia entre decimales.
- Equivalencia entre distintas representaciones de los decimales.
- Ubicación y orden en la recta numérica.
- Propiedad de densidad.
- Problemas aditivos y multiplicativos con decimales: Donde los estudiantes debían resolver y formular problemas con el uso de decimales.



Escuela: ________ Fecha: ________
Nombre: ________ Grupo: ________

INDICACIONES: Lee atentamente las preguntas y contesta según consideres correcto, procura explicar tus respuestas cuando se te pida.

1. De los siguientes números encierra los que sean números decimales y después contesta las preguntas

0.250	$\frac{1}{2}$	12.0	0.0002	$\frac{5}{7}$
1349	3.1416	$\frac{1}{1000}$	0.5	0.333333¯

2. Escribe el antecesor y sucesor de los siguientes números, si es que los hay:

____ 31 ____ ____ 1.75 ____ ____ 9.29 ____

3. Escribe un número que vaya entre cada par de cifras y escríbelo en la línea de en medio.

3.28 ____ 3.29 1.5 ____ 1.6 0.2 ____ 0.3

4. Coloca los números que faltan.

1.62 1.63

6. Observa los números de la primera columna y únelos, trazando una línea, con su equivalente en la otra columna (si los hay).

0.125
0.75
0.3500
$\frac{6}{8}$

7. Ana quiere saber cuántos centésimos hay en 3 décimos. Ayúdale a encontrar la respuesta.________.

8. Algunos niños dicen que un milésimo es mayor que un centésimo y que un centésimo es mayor que un décimo. Fíjate lo que respondieron:

"Los milésimos son más grandes porque están divididos en mil, ¡son mil partes!

¿Tú estás de acuerdo con los que dijeron esos niños? ________
¿Por qué? ________

9. En una carrera atlética los corredores obtuvieron los siguientes tiempos:
Escribe cuánto representa la cifra subrayada en cada cantidad.

Corredor	Tiempo (minutos)
Ernesto	13.12
Alexis	13.07
Enrique	13.187
Manuel	13.2

Ejemplo: El 1 subrayado representa 1 décimo.

- Ordena los tiempos de menor a mayor.________
- ¿Quién ganó la carrera?________
- ¿Quién quedó en último lugar?________

10. Observa las cantidades que tenía Ana y lo que agregó a cada cantidad. Ayúdale a escribir los resultados. Puedes hacer operaciones al reverso de la hoja.

Tenía		Agregó	Resultado
5920	más	15 decenas	
62.152	más	4 centésimos	
14.70	más	5 décimos	

11. ¿Cuántos números puede haber entre 5.24 y 5.25?________
Explica tu respuesta________

12. Observa los siguientes decimales y trata de escribir en la línea de abajo, la misma cantidad pero en fracción.

0.5 1.75 0.004

13. ¿Cuál es el resultado de dividir el número 24 entre 30? Encierra la respuesta que creas correcta.

a) No se puede dividir b) 0.8
c) 1.25 d) 2.8

Haz una operación para verificar tu respuesta

14. De cada par de operaciones, encierra la que consideres que dará el resultado mayor.

4 x 3	ó	4 ÷ 3
4 x 0.3	ó	4 ÷ 0.3

15. ¿Cuál de los siguientes números está "más lejos" del 14.41:

a) 14.41000 b) 14.411 c) 14.42

16. Para ti ¿Qué es un número decimal?________

17. ¿Qué tiene que ver la fracción $\frac{3}{4}$ con el número 0.75?________

18. Lee el nombre de las siguientes cantidades y escribe el número que les corresponda.

Siete milésimos ________
Veinte centésimos ________
Diecinueve milésimos ________
Nueve décimos ________
Tres centésimos ________

19. Resuelve el siguiente problema:
Para la fiesta de su hija, Doña Mari compró 25 kilos de pollo por los cuales pagó $887.50. ¿Cuál es el precio de cada kilo de pollo?

20. Inventa y resuelva un problema que se pueda resolver con la siguiente operación: 45.5 x 2.50

Figura 3.12. Cuestionario final aplicado a los estudiantes.

Con el objetivo de verificar el progreso en los alumnos, se procuró incluir todos los aspectos de los decimales trabajados en las sesiones, presentándolos de forma similar a los ejercicios realizados en ellas. En esta evaluación se presentaron solamente los ejercicios a resolver, omitiendo explicaciones por parte de los alumnos respecto a la forma de resolución, debido a que éstas fueron explicitadas a lo largo de las sesiones de trabajo.

Los resultados de este cuestionario, si bien fueron útiles para identificar el progreso de los estudiantes al finalizar la realización del experimento de enseñanza, se retomaron principalmente para identificar las dificultades persistentes en los alumnos después del desarrollo de las sesiones de instrucción. Estos resultados se presentan en los capítulos siguientes.

3.3. Datos

Los datos que conforman esta investigación corresponden a una serie de materiales que se recabaron durante el proceso de desarrollo del experimento de enseñanza y de los cuales damos cuenta a continuación:

- *Respuestas a los cuestionarios inicial y final*:

  Las cuales dan muestra de algunos de los procedimientos seguidos por los estudiantes, ya que contienen operaciones, esquemas o gráficos que les fueron útiles en la resolución de un determinado problema o pregunta.

  - *Las respuestas dadas en las sesiones*:

    Estas fueron recopiladas a través de grabaciones en video (Sesiones 1 a la 9) y carteles de actividades (sesiones 6, 8 y 9). Las grabaciones de video fueron posteriormente transcriptas a fin de recuperar los procesos seguidos por los estudiantes a lo largo del desarrollo de cada sesión.

  - *Los diálogos y/o debates*:

    Los cuales reflejan el proceso de construcción del conocimiento de los estudiantes.

3.4. Análisis

Una vez que se tuvieron sistematizados los datos, se realizó el análisis de la información a través de tres etapas que se describen a continuación.

1ª etapa: Se realizó el análisis de los datos recogidos en los cuestionarios inicial y final. Para ello se organizaron los reactivos que integraban los instrumentos aplicados según los seis ámbitos bajo los cuales se organizaron las sesiones que conforman el experimento de enseñanza, se clasificaron las respuestas de los estudiantes mediante tablas de frecuencia, de tal forma que permitieran determinar el grado de avance en la comprensión que obtuvieron los alumnos en cada uno de los ámbitos abordados.

Cuando se hubieron organizado los datos de ambos cuestionarios, se identificaron los aspectos en los que los estudiantes tuvieron mejoras significativas y aquellos en los que el avance fue menor, para pasar a la siguiente etapa del análisis.

2ª etapa: Consistió en la revisión de los videos de las sesiones trabajadas así como de las transcripciones con la finalidad de identificar el avance en la comprensión de los estudiantes, determinar en qué medida las actividades propuestas, las discusiones generadas y los materiales utilizados fueron adecuados para favorecer dichos cambios y extraer los comentarios y producciones de los estudiantes que dieran muestra de los razonamientos generados. Una vez que éstos fueron identificados, se realizó la comparación de los resultados o datos obtenidos, con los de otras investigaciones para determinar hasta qué punto coinciden con los resultados de nuestra investigación o hasta dónde esta investigación arroja datos nuevos.

3ª etapa: En esta etapa se llevó a cabo la comparación general de los resultados del primer cuestionario y los procesos seguidos por los estudiantes en el desarrollo de las sesiones con los resultados del cuestionario final, con el objetivo de enlistar las dificultades persistentes en los estudiantes después de la aplicación del experimento de enseñanza y poder tener elementos para formular sugerencias de mejora a las sesiones diseñadas.

Segunda parte:

Resultados y conclusiones

Capítulo 4.

Resultados:

- Comprensión de las escrituras con punto.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

• COMPRENSIÓN DE LAS ESCRITURAS CON PUNTO

En este capítulo se presenta parte de los resultados obtenidos en la investigación realizada. Se trata de mostrar lo ocurrido, en términos de aprendizaje de las matemáticas, alrededor de cada una de las actividades propuestas con el fin de que los alumnos tuvieran un acercamiento a los números decimales.

En primer lugar, se muestra un ejemplo de las actividades planteadas y las principales formas en las que los estudiantes las resolvieron; se destacan los razonamientos generados y los conflictos o dificultades que tuvieron lugar y contribuyeron a favorecer la comprensión de los decimales; se incluyen algunos comentarios emitidos por los alumnos durante las sesiones, para posteriormente destacar los aspectos en los cuales se mostraron avances. Finalmente se muestran las dificultades que persistieron aún después de haber realizado las actividades correspondientes al experimento de enseñanza diseñado.

4.1 Sesión 1. Relación entre distintas escrituras de los decimales.

Esta sesión estuvo conformada por tres actividades que a continuación se describen:

Descripción de la actividad 1: Se solicitó a los estudiantes observar distintas formas de representar un número decimal (Figura 4.1) a fin de identificar las ideas con las cuales relacionan con dichos números.

Actividad 1 Observa las respuestas que dieron algunos de tus compañeros al solicitarles representar con número una cantidad decimal dada e indica si son correctas o no, argumenta por qué.

Cantidad dada	Alum. 1	Alum. 2	Alum. 3	Alum. 4	Alum. 5	Alum. 6
Cuarenta y cinco milésimos	$\frac{45}{1000}$	45.1000	.45	0.045	0.45	48 ml
Siete décimos	$\frac{7}{10}$	7.10	.7	0.7	0.7	7 dm
Tres milésimos	$\frac{3}{1000}$	3.1000	.3	0.003	00.3	3 ml

Figura 4.1. Representaciones de diversos números decimales elaboradas por los estudiantes, tomadas de las respuestas dadas en el cuestionario inicial o diagnóstico.

Las representaciones incluidas en el cuadro se seleccionaron con la intención de mostrar la variedad de respuestas dadas, es por ello que sólo se colocan las de seis estudiantes. Es decir, las respuestas seleccionadas son representativas de las obtenidas en el grupo, algunas de ellas sólo aparecieron en una ocasión y otras con mayor frecuencia.

Una vez socializadas las respuestas, se solicitó a los estudiantes señalar cuáles escrituras eran correctas y cuáles no, así como argumentar el por qué de cada comentario emitido. Respecto de las escrituras correspondientes a *cuarenta y cinco milésimos* (primer renglón de la tabla), se emitieron los comentarios mostrados en la figura 4.2 (ver adelante), donde se destaca que en un primer momento, la mayoría de los estudiantes no identifica a la fracción como una forma para representar el número cuarenta y cinco milésimos, se alude a la idea siguiente: para que un número sea considerado decimal, necesariamente debe tener el símbolo que así lo identifique, siendo éste el punto. Esta idea, sabemos, no es correcta, pero es la que prevalece entre los estudiantes. Es hasta que un alumno comenta que la escritura $\frac{45}{1000}$ (Figura 4.2a) es correcta, que el resto del grupo la reconoce como una posibilidad de expresión del decimal.

	Cantidad presentada	Opiniones de los alumnos
a)	$\frac{45}{1000}$	*"Está mal, porque no se piden en décimos, milésimos"* (haciendo referencia a que no se solicitó la escritura en fracción). *"Yo digo que está igual porque lo puedes representar en fracción o en número"*,
b)	45.1000	La escritura es incorrecta porque *"están diciendo cuarenta y cinco enteros y mil diezmilésimos"*, *"el cuarenta y cinco está representando a números enteros"*.
c)	.45	*"Así serían 45 centésimos"* *"Así son cuarenta y cinco centésimos, no cuarenta y cinco centésimos milésimos"*
d)	0.045	*"Así si son cuarenta y cinco milésimos" "...porque ahí está diciendo que hay cero enteros, cero décimos y cuarenta y cinco milésimos porque son 3 números después del punto ...*
e)	0.45	*"Está mal porque escribieron lo mismo que en el otro* (refiriéndose a la escritura .45) *sólo que le aumentaron el cero* (antes del punto)... *así son 45 centésimos"*

Figura 4.2. Comentarios emitidos por los estudiantes respecto a la escritura del número cuarenta y cinco milésimos.

Respecto a la escritura 45.1000 (Figura 4.2b), los alumnos identifican rápidamente que es incorrecta y mencionan como criterio que se anotaron cifras antes del punto decimal, lo cual significa que el compañero escribió un número con 45 enteros, no con 45 milésimos. Esta escritura refleja en los estudiantes que la produjeron, un pensamiento ligado a las reglas aplicadas a los números naturales ya que consideran a los cuarenta y cinco y a los milésimos como dos cantidades independientes, colocando así el cuarenta y cinco en el lugar de los enteros y los milésimos como otro número (mil) el cual colocan después del punto. Este tipo de representaciones probablemente se generan cuando los estudiantes no logran reconocer que los órdenes de agrupación en los números decimales responden a reglas distintas a las que se siguen con los números naturales.

En los comentarios emitidos por los estudiantes para el resto de las representaciones (Figuras 4.2c, d y e), se observa que éstos reconocen fácilmente el nombre de las columnas a la derecha del punto (décimos, centésimos y milésimos respectivamente) y reconocen al cero como identificador de lugar, ya que consideran que escrituras como 0.45 y 0.045 son distintas por la posición que ocupa cada una de las cifras, afirmando que un número expresado en milésimos, necesariamente debe poseer tres cifras después del punto decimal, de lo contrario no corresponde al orden de los milésimos.

Las representaciones del resto de las cantidades presentadas en la figura 4.1 (siete décimos, tres milésimos y dieciocho milésimos) fueron analizadas de igual manera, encontrándose que las ideas expresadas en los comentarios de los estudiantes son similares a las emitidas en el análisis de las escrituras obtenidas para cuarenta y cinco milésimos.

En general, en un primer momento los estudiantes reconocen a los decimales sólo como aquellos números que en su escritura tienen un punto decimal, es gracias a los comentarios de algunos de sus compañeros, que logran identificar a las fracciones decimales (fracciones con denominador potencia de diez) como otro tipo de escrituras válidas para expresar los números decimales.

La principal estrategia que emplean para identificar el nombre correcto de un decimal consiste en relacionar la cantidad de cifras con los lugares o posiciones después del punto:

Una cifra = décimos

Dos cifras = centésimos

Tres cifras = milésimos…

Descripción de la actividad 2: Se organizó a los alumnos en equipos de 5 o 6 integrantes y se les solicitó formar pares de tarjetas, de tal forma que relacionaran una tarjeta con un número decimal en su expresión con punto, con otra que tuviera el nombre del número (Figura 4.3). En un primer momento la actividad no representó dificultades ya que como lo mostraron en la actividad anterior, los niños tomaban la cantidad de cifras después del punto como referencia para identificar el nombre correcto del número indicado, es decir, si el número tenía una cifra después del punto decimal, daban por hecho que eran décimos, si había dos cifras significaba que la cantidad estaba expresada en centésimos y si aparecían tres cifras, los relacionaban con los milésimos.

a)	0.030	treinta milésimos
b)	0.8	ocho décimos
c)	0.15	quince centésimos
d)	0.060	seis centésimos
e)	0.015	quince milésimos

f)	0.008	ocho milésimos
g)	0.30	treinta centésimos
h)	0.6	Seis décimos
i)	0.2	dos décimos

Figura 4.3. Tarjetas entregadas a los estudiantes.

La idea de que la etiqueta “décimos” correspondía a números con una cifra después del punto, la etiqueta “centésimos”, a otro de dos cifras después del punto, etcétera, parecía ser funcional hasta que los alumnos intentaron relacionar la tarjeta d de la figura 4.3 (0.060 y seis centésimos) donde la cantidad de cifras no correspondía al orden que intentaban asignarle (tres cifras correspondían, según las reglas hasta ese momento utilizadas, a los milésimos). Entonces surgió la discusión al interior de los equipos respecto de la equivalencia entre ambos números. Un ejemplo de los comentarios de los estudiantes es el siguiente:

> A-1 *“Sí,* [se pueden relacionar ambas tarjetas] *porque el 6 está aquí (*señalando la columna de los centésimos) *y si le quitamos el cero* [indica la última cifra] *son 6 centésimos.*
>
> A-2: *“Noooo, porque... cuando son centésimos son dos números y cuando son milésimos son tres números y aquí son tres”*
>
> A-3: *“Pero seis centésimos es igual a sesenta milésimos”.*

Además de la discusión anterior, surgieron otros comentarios acerca de si seis centésimos es un nombre válido para 0.060:

> A-4: *"Seis centésimos y sesenta milésimos es lo mismo porque la otra vez [resolvimos] un ejercicio casi igual e hicimos las gráficas* [refiriéndose a la representación en el cuadrado-unitario] *y es lo mismo… porque en los milésimos tiene cero, son cero y entonces no vale".*
>
> *A-5: "Si te imaginas que no está el cero aunque sea diferente el nombre, puedes ver que el seis está en los centésimos y sí puede ser el nombre que está ahí"*

Se observa que los alumnos se encuentran confundidos respecto de la equivalencia de dichas representaciones ya que no deciden si es correcta o incorrecta la relación que establecieron; la mayoría afirma que no se puede relacionar la ***tarjeta de 0.060*** con la de ***sesenta centésimos*** a pesar de que sí reconocen la equivalencia existente, tal como lo mencionan cuatro estudiantes al comentar lo siguiente:

> *A-6: "Sí pueden representar lo mismo porque de los centésimos se sacan los milésimos y en cada centésimo hay diez milésimos entonces serían 6 [centésimos] igual a 60 [milésimos] pero el nombre está mal".*
>
> *A-7: "Sí son lo mismo pero no es el nombre correcto"*
>
> *A-8: "Sí representan lo mismo pero la cantidad es la que cambia el nombre del número"*
>
> *A-9: "Para poder acomodarlos, aunque sea un cero y quede en milésimos a fuerzas se cuenta en milésimos"*

Este último comentario hace referencia a que aunque la última cifra de la cantidad sea cero, sí debe considerarse al expresar el nombre de dicho número ya que forma parte de la representación dada. Con esta opinión está de acuerdo la mayoría de los equipos y el grupo concluye que:

> *Los números presentados sí representan lo mismo o sí son equivalentes, pero el nombre de la tarjeta es incorrecto ya que al*

escribir el nombre de un número se deben considerar todas las cifras que se encuentren después del punto decimal, incluido el cero correspondiente a la última cifra.

Como se ha visto, no hubo dudas al relacionar los decimales y sus nombres incluidos en las tarjetas. Pero la mayoría de los alumnos se confundieron respecto a si dos cantidades equivalentes pueden identificarse con un mismo nombre o a cada una le corresponde el propio.

Para disipar las dudas generadas respecto a cuál era la forma adecuada de escribir el nombre de un decimal, se anotaron en el pizarrón las siguientes cantidades: 0.6, 0.60, 0.006, 0.06 y 0.060 y se solicitó a algunos estudiantes que escribieran el nombre de cada número (Figura 4.4).

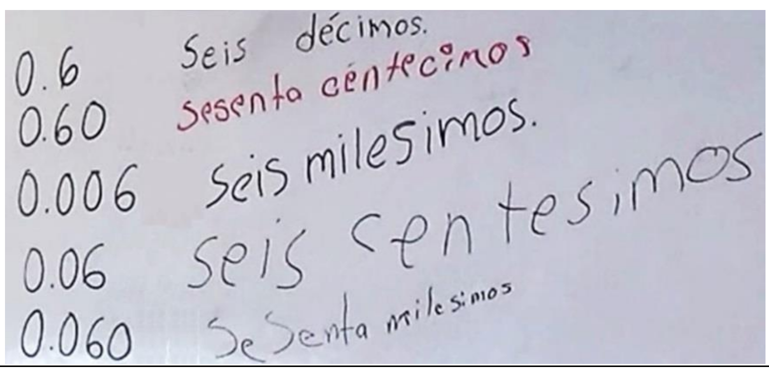


Figura 4.4. Números presentados a los estudiantes y escritura de los nombres generados por los alumnos.

Una vez que escribieron los nombres de los números, los estudiantes afirmaron que había equivalencia entre seis décimos y sesenta centésimos y entre seis centésimos y sesenta milésimos, pero de nuevo concluyeron que:

A cada cantidad le corresponde un nombre específico a pesar de tratarse de números equivalentes.

Descripción de la actividad 3: Con la finalidad de identificar las dificultades persistentes respecto de la escritura de los decimales tanto en su representación con punto decimal como mediante el nombre del número, se pidió a los estudiantes escribir los siguientes números (Figura 4.5)

INDICACIONES: Lee el nombre de las siguientes cantidades y escribe el número que les corresponda.

1. Dieciséis milésimos ____________
2. Cuatro décimos ____________
3. Treinta y nueve centésimos ____________
4. Veintitrés décimos ____________
5. Doscientos cuatro milésimos ____________
6. Siete centésimos ____________
7. Nueve milésimos ____________

Observa las siguientes cantidades y escribe su nombre con letra.

0.006 ____________
0.9 ____________
0.012 ____________
0.04 ____________
2.4 ____________ décimos
0.381 ____________
0.53 ____________

Figura 4.5. Números presentados a los estudiantes.

Como ya se dijo, la principal estrategia empleada por los alumnos al escribir un número decimal, consiste en hacer corresponder el nombre de la parte decimal del número con el número de cifras. Es decir, si el nombre del número indica décimos, lo relacionan con una cifra después del punto, a los centésimos con dos cifras y a los milésimos con tres cifras después del punto. Así, los números en los que se observaron menos errores corresponden a aquellos que cumplen la regla anteriormente descrita, como en cuatro décimos, treinta y nueve centésimos y doscientos cuatro milésimos

En el ejercicio donde se proporcionó el nombre de los números y se solicitó a los estudiantes escribir la representación correspondiente con punto, las mayores dificultades se presentaron al representar veintitrés décimos, ya que esta solicitud implicaba hacer una conversión de décimos a enteros, pero más de la mitad de los estudiantes se limitó a colocar la cantidad después del punto obteniendo en su mayoría escrituras como 0.23 o en menor medida 0.023, ambas incorrectas. Este tipo de respuestas probablemente se deben a que los niños consideran que los decimales corresponden únicamente a la parte menor a la unidad (la parte después del punto), pero es evidente que no realizaron las conversiones pertinentes para establecer la equivalencia entre veintitrés décimos y dos enteros tres décimos, lo que les habría llevado a identificar que con veintitrés décimos se pueden formar dos unidades enteras, quedando tres décimos sin agrupar.

En la segunda parte de la actividad, donde se proporcionó el número y se solicitó a los alumnos escribir el nombre del mismo (véase figura 4.5), se encontraron menos dificultades y/o errores. La mayoría de los estudiantes siguió las reglas anteriormente descritas. Nuevamente se hizo evidente la dificultad de establecer equivalencia entre números expresados en términos decimales como lo son décimos, centésimos y milésimos y aquellos que contienen una parte que es mayor que la unidad. En el caso del número 2.4, la gran mayoría de los estudiantes lo identificó como dos enteros cuatro décimos, siendo solamente tres alumnos quienes establecieron correctamente su equivalente en décimos (24 décimos), tal como se solicitaba en el cuestionario. Lo anterior, probablemente se debió a que las inidicaciones dadas no fueron claras respecto de la forma en que se deseaba expesaran dicho número, solamente se colocó la palabra décimos, la cual en la escritura dos enteros cuatro décimos, también es útil.

4.2 Sesión 3: Relación de una fracción decimal con la unidad.

Esta sesión se planeó después de haber trabajado con los estudiantes la relación de los decimales con sus diversas representaciones y la equivalencia entre distintos representantes de un mismo número decimal (sesiones 1 y 2), ya que se identificó que la mayoría de los estudiantes lograban expresar oralmente la relación entre el décimo, el centésimo y el milésimo con frases como“*una de diez partes, una de cien partes o una de mil partes”*, pero no identificaban claramente que esas “partes” estaban dadas en función de la unidad o el entero.

La sesión fue trabajada a través de dos actividades que se describen a continuación.

Descripción de la actividad 1: Se organizó al grupo en parejas y a cada pareja se le entregó un trozo de estambre que representaría el entero en el que debían señalar la parte que representara un décimo del mismo.

Al parecer, los alumnos tenían claro que debían dividir el estambre en diez partes iguales para obtener la correspondiente a un décimo. Así que comenzaron a medir y/o a hacer dobleces en el estambre, pero tenían dificultades para obtener los diez trozos de la misma longitud. La dificultad estuvo en el procedimiento que utilizaban, más que en la idea de lo que es un décimo. Algunas de las explicaciones que dieron los alumnos acerca de cómo intentaron obtener u obtuvieron el décimo fueron las siguientes:

> A-3 *"Doblándolo a la mitad, luego otra vez a la mitad y otra vez a la mitad"* [con esta estrategia es obvio que no se obtendrían décimos, sino partes correspondientes a fracciones múltiplos de dos].
>
> *A-5 "Se puede doblar a la mitad y medir…* [no pudieron explicar cómo se obtendrían las diez partes]... *se puede con los dedos… es que le estamos intentando pero no sale* [refiriendo a que habían intentado definir el tamaño del décimo con la longitud de sus dedos y/o la mano*…]".*
>
> A-1 "*Primero medimos todo el estambre y midió 115 cm, ya que lo medimos, lo dividimos entre diez y el resultado nos dio 11.5 y de ahí medimos las diez partes de 11.5 cm.*
>
> A-2 *"Igual, medimos el listón y midió 114 cm, lo dividimos por diez porque dijo que lo dividiéramos en diez* [refiriéndose a que la indicación era obtener décimos] *y nos quedó de 11.4 cm y lo hicimos así [marcando trozos de 11.4 cm].*
>
> A-4 *"Se puede doblar así, hasta tener los diez* [indicando que sólo se debía calcular el tamaño de cada trozo y doblar el estambre hasta obtener los diez trozos iguales].

Los comentarios emitidos por los estudiantes A-1 y A-2, son ejemplos de una estrategia adecuada para obtener los décimos: los estudiantes hacen uso de la medición ya que consideran al estambre como la unidad de la cual obtienen la longitud total y dividen dicha medida en diez partes (a través de una división). La medida resultante es la que utilizan para marcar sobre el estambre los diez trozos que corresponderán a los décimos, al obtener diez partes iguales. Sin embargo, el resto de los comentarios reitera el hecho de que la mayor dificultad para los estudiantes fue la división del entero en diez partes iguales, más que la comprensión de lo que es un décimo. Los estudiantes A-3 y A-5 intentaron dividir el estambre a la mitad y los trozos así obtenidos nuevamente a la mitad, pero en general, el grupo identificó que doblando el entero por mitades no llegarían a obtener las diez partes iguales, así que descartaron ese procedimiento.

La mayoría de los alumnos reconocieron que lo difícil fue dividir el entero pero lograron identificar que un décimo va a ser una parte más pequeña que el entero (de referencia) y que estará dado en función de éste, descartando las ideas de algunos estudiantes respecto a que los décimos son diez objetos, cosas o partes aisladas, sin relación con un entero o unidad.

Posteriormente se propuso como entero una bolsa con 10 chicles y se solicitó a los estudiantes que identificaran cuál sería un décimo, la mayoría identificó que un décimo de la bolsa de chicles sería un chicle porque:

> *A-6 "La bolsa tiene diez chicles y agarro uno porque es un décimo" "porque la bolsa es mi entero, bueno, los chicles, y pues ya están las pastillitas, entonces es uno* [refiriéndose a que un chicle representa un décimo de los diez chicles contenidos en la bolsa]".

Se preguntó al grupo cuál sería el décimo si el entero fuera un solo chicle y respondieron: *"lo dividimos en diez partes".* La mayoría del grupo dividió un chicle en diez partes e indicó que el décimo (del chicle) era sólo una de esas partes. Se realizó la misma actividad con un chocolate y se observó que los estudiantes no tenían dificultad en relacionar los décimos con el entero, ya que realizaron correctamente la partición de la unidad en diez partes iguales. La principal estrategia que emplearon para encontrar las partes fue la medición de la longitud total del entero para dividir dicha medida entre diez y obtener la longitud exacta de cada décimo; de este modo, se aseguraba la obtención de partes de igual longitud.

Posteriormente se integró al grupo en equipos de 5 o 6 estudiantes y se les entregó un círculo de cartulina para que identificaran en dicha figura un décimo de la misma. Algunos de los comentarios que hicieron los alumnos fueron los siguientes:

> *E-1*[18] *Primero lo medimos y vimos que medía 26 centímetros* [refiriéndose al diámetro del círculo]*, lo medimos en 13 y nos salió la mitad, de ahí hicimos una raya en donde nos quedó el 13* [refiriéndose a que a partir del centro, dividieron el círculo en cuartos] *y empezamos a hacer las rayas y ya nos salió así…* (Figura 4.6a)

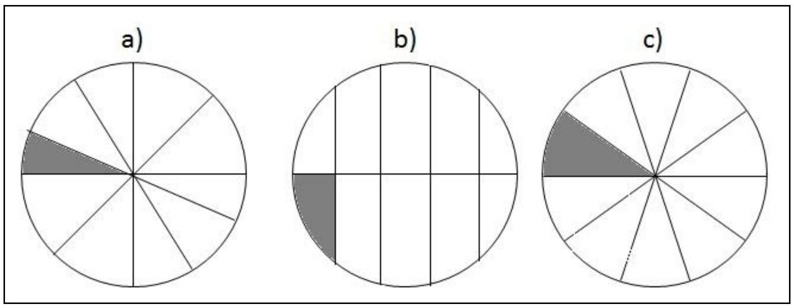


Figura 4.6. Divisiones del entero elaboradas por los estudiantes

El equipo explicó que habían dividido el círculo en octavos y que como observaron que les hacían falta dos trozos para que el círculo quedara dividido en décimos, identificaron los trozos que habían quedado más grandes y los dividieron a la mitad a fin de obtener las diez partes.

En el grupo se identificó que algunos trozos habían quedado más grandes que otros a pesar de haber dividido el círculo en diez partes, y *"para ser un décimo tienen que ser partes iguales"*. Pocos alumnos afirmaban que sí podían ser décimos porque el círculo estaba dividido en diez partes. La mayoría estuvo de acuerdo en que no podían ser décimos si no eran partes iguales.

> *E-2 "Primero lo dividimos en cinco y después lo dividimos a la mitad para que nos salieran diez partes iguales y coloreamos una".* (Figura 4.6b)

[18] En lo sucesivo, la letra E hace referencia a los comentarios emitidos por el equipo de trabajo, dicha letra se acompaña de un número para identificar a los diferentes equipos.

Los demás equipos consideraron que de esa forma tampoco podían ser décimos aunque estuviera dividido en diez partes porque: "S*i dicen que para que sean décimos deben ser iguales todas las partes… la parte coloreada no es la misma que la parte del centro"*.

> *E-3 "Nosotros tomamos el círculo y primero marcamos al centro, luego con un transportador... dividimos el círculo entre diez haciendo una división y nos salió a treinta y seis grados y lo fuimos dividiendo así…"*.
>
> *E-4 "Hicimos lo mismo… El circulo mide 360° y lo dividimos en diez nos salió 36°, agarramos el transportador y medimos 36°, 36°, 36°* [señalando cada una de las partes]*… y ya nos salió".* (Figura 4.6c).

Los equipos que emitieron los comentarios anteriores consideraron que el ángulo que representa el círculo completo mide trescientos sesenta grados sexagesimales, por lo que con ayuda del transportador, se puede dividir la amplitud de dicho ángulo en diez partes de treinta y seis grados cada una. El resto del grupo coincidió en que ese círculo sí estaba dividido en diez partes iguales, aprobando el procedimiento utilizado y afirmando que de esa forma sí eran décimos.

Descripción de la actividad 2: Para identificar si los estudiantes establecen la relación de la parte fraccionaria de un número decimal con la unidad, se les entregó de forma individual el ejercicio que se muestra en la Figura 4.7, donde se solicitaba obtener un décimo de un entero dado e identificar el entero dada la parte.

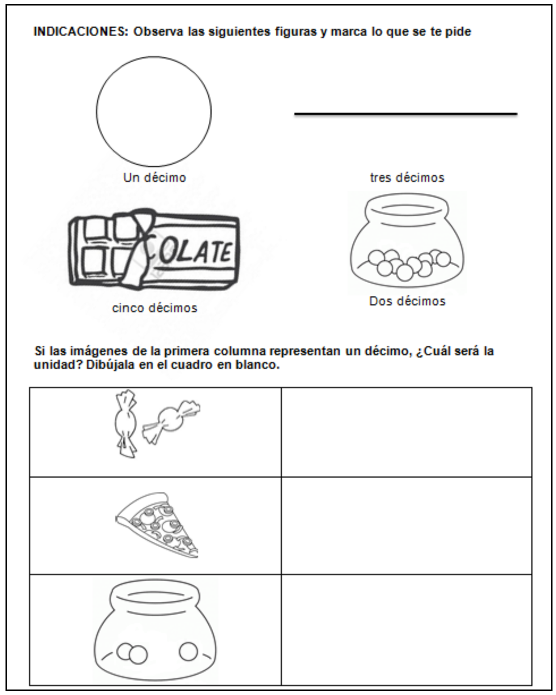


Figura 4.7. Ejercicio de relación de la parte decimal con la unidad.

En la primera parte, donde se solicitaba dividir el entero en décimos y marcar la cantidad de décimos indicada en cada figura, la mayoría de los estudiantes identificó correctamente uno, dos, tres y cinco décimos respectivamente en las figuras presentadas. Algunos de ellos muestran dificultad para obtener partes iguales al realizar la división del entero pero en general dan muestra de que reconocen el décimo en función de la unidad, también reflejan saber que las diez partes resultantes deben ser iguales para ser consideradas como décimos.

Se presentaron casos en los que los estudiantes dividen los enteros en tercios, quintos u octavos. A pesar de las dificultades para hacer la partición, los estudiantes lograron identificar la parte decimal en función de la unidad dada. En la figura 4.8 se muestran algunas de las respuestas de los estudiantes para representar uno, dos, tres y cinco décimos según se indicaba.

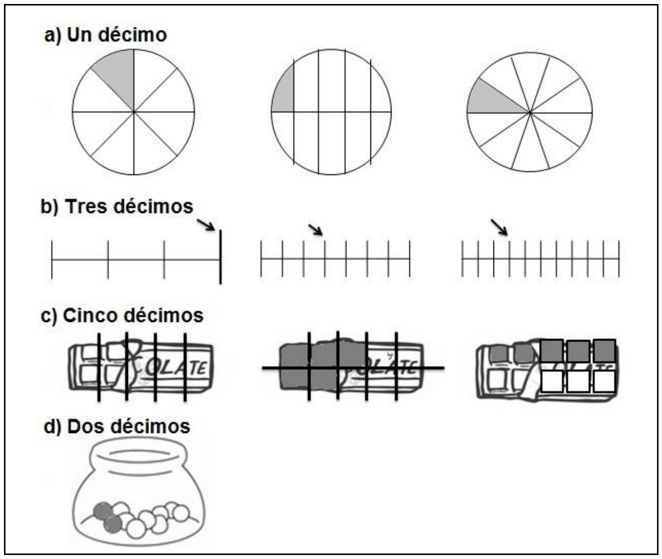


Figura 4.8. Distintas representaciones elaboradas por los estudiantes.

En la segunda parte del ejercicio, donde se solicitaba identificar el entero a partir de una parte que correspondía a un décimo, se encontraron más dificultades. La mayoría de los estudiantes, si bien es cierto que identifican el décimo en función de la unidad, no logran establecer esta relación cuando el entero lo constituye un conjunto, es decir, cuando el décimo corresponde a más de un objeto, como en el caso de los dulces, donde se especifica que un décimo del total corresponde a dos dulces y se pide encontrar el entero que en este caso correspondería a 20 dulces. En casos como éste, los estudiantes relacionan cada décimo con un único objeto o parte, ocurriendo que representen al entero como un conjunto de diez dulces o dibujando los ocho dulces faltantes para completar un conjunto de diez partes iguales que identifican como el entero.

Este fue uno de los aspectos más difíciles de comprender para los alumnos, algunos confundían los décimos con las decenas, lo cual se percibía cuando mencionaban, por ejemplo, que "un décimo son diez cosas". Sólo alrededor del 30% de los 34 estudiantes lograron identificar el entero cuando un décimo correspondía a más de un objeto.

4.3 Principales momentos en el proceso de comprensión de los aspectos antes mencionados.

A continuación se enlistan los que se identificaron como principales momentos en la comprensión de aspectos relevantes de los decimales, evidenciados en el proceso seguido por los estudiantes con quienes se realizaron las actividades. Estos momentos pretenden ser muestra del proceso que siguen en la comprensión de los decimales y que les permitirán llegar en un momento determinado a comprender otros aspectos de estos números que representen mayor dificultad cognitiva.

- ✓ Los estudiantes muestran dificultad para comprender que un décimo es la décima parte de la unidad, muchos lo relacionan con un conjunto de diez cosas u objetos (lo cual corresponde a una decena). Cuando se hace uso de materiales que se pueden dividir, permitiendo que los estudiantes comiencen a establecer la relación de las partes con la unidad e identifiquen que un décimo es una de diez partes y una decena es mayor que la unidad, las dificultades son menores.Pero cuando estos materiales no se tienen a la mano al resolver una situación determinada, las dificultades se vuelven a presentar.

- ✓ Se observa dificultad para: a) reconocer que la parte decimal de un número está dada en función del entero; b) comprender que un conjunto de objetos puede representar un entero o unidad; c) identificar la unidad de referencia a partir de una parte decimal (un décimo, por ejemplo).

- ✓ Al efectuar la división de un objeto para obtener cierta parte decimal, si se trata de un segmento de recta, por lo regular los estudiantes recurren a la medición de la longitud utilizando la regla graduada en centímetros. Hacen uso de otros conocimientos y herramientas, tales como el manejo del transportador, para subdividir un círculo, si el entero está representado por éste. A pesar de las dificultades para subdividir, un conocimiento que tienen presente es que las partes en que se divide el entero deben ser iguales.

- ✓ Respecto del reconocimiento de la relación existente entre la expresión de un decimal mediante expresión con punto y el nombre del decimal, la mayoría de los estudiantes reconoce con facilidad cuando hay equivalencia entre números como 0.06 y 0.060, identificando con claridad que a pesar de la equivalencia existente entre dichos números, a cada uno le corresponde un nombre único (seis centésimos y sesenta milésimos respectivamente).

  La aparición del cero (como última cifra de un número) ayuda a los estudiantes a reconocer la identidad del número aunque su valor sea equivalente a otro, ya que mencionan que: *"Si está el cero, se tiene que contar… entonces son lo mismo* (refiriendo al valor de ambos números)*, pero su nombre es diferente"*. Mediante el intercambio de ideas se logra que los estudiantes diferencien la equivalencia entre dos números, de su identidad.

4.4 Dificultades persistentes.

Una vez realizadas las actividades con los estudiantes, se identificaron aspectos que continúan representando dificultades, como:

- ✓ Cuando no se cuenta con material que permita la división del entero, se hace evidente que la mayoría de los estudiantes tiende a considerar al décimo como un objeto aislado sin relación con la unidad.
- ✓ El reconocimiento de la unidad a partir de una parte decimal se dificulta principalmente cuando la unidad refiere a un conjunto diferente de 10 objetos.

Capítulo 5.

Resultados:

-Equivalencia entre distintos órdenes de la parte fraccionaria de los números decimales.

-Comparación y orden de los decimales.

CAPÍTULO 5. RESULTADOS

• EQUIVALENCIA ENTRE DISTINTOS ÓRDENES DE LA PARTE FRACCIONARIA DE LOS NÚMEROS DECIMALES.

• COMPARACIÓN Y ORDEN DE LOS DECIMALES.

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos en la investigación realizada en torno a las equivalencias entre distintos órdenes de la parte fraccionaria de los decimales (décimos, centésimos y milésimos)

5.1 Análisis de las sesiones correspondientes a la equivalencia entre distintos órdenes de la parte fraccionaria de los números decimales.

La sesión incluida en este rubro estuvo dedicada a que los estudiantes identificaran equivalencias entre distintos representantes de un decimal, entendiendo como representante a cualquier elemento de una clase de equivalencia.

5.1.1 Sesión 2: Equivalencia entre distintos representantes de un número decimal.

El objetivo de la sesión fue que los estudiantes lograran identificar la equivalencia existente entre números decimales de distinto orden haciendo uso de su representación a través del *cuadrado unitario* como herramienta para verificar resultados y/o aclarar ideas al respecto.

Descripción de la actividad 1: Se organizó a los estudiantes en equipos de cinco o seis integrantes solicitándoles observar tarjetas con distintos números decimales y representar gráficamente el valor de cada decimal, haciendo uso del *cuadrado unitario* (Figura 5.1).

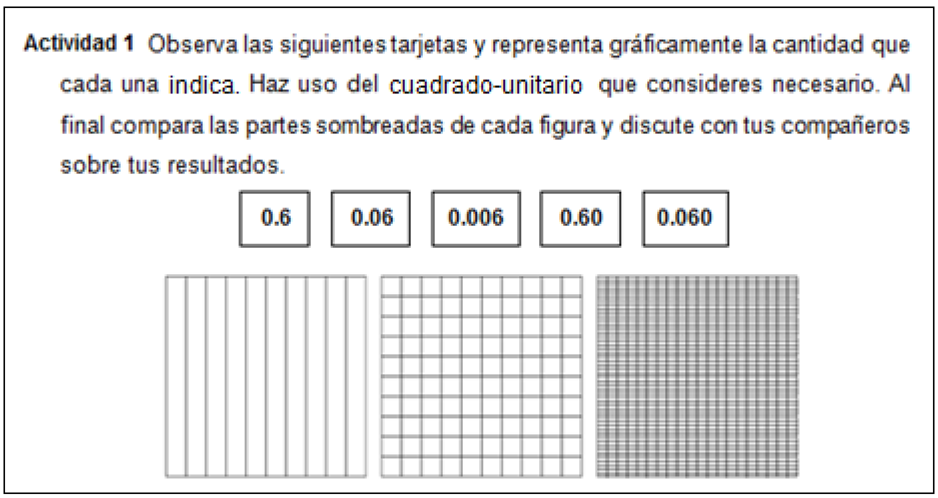


Figura 5.1. Actividad planteada para identificar equivalencia entre distintos representantes de un decimal.

El *cuadrado unitario* es un material que se introdujo desde hace más de diez años en la educación primaria a través de los libros de texto gratuito, y cuando se llevó a cabo este experimento de enseñanza ya había sido utilizado por los estudiantes en algunas sesiones con el profesor del grupo. Por esto, no hubo necesidad de profundizar en la forma en que se utilizaría. Una vez dadas las consignas para realizar el ejercicio, los estudiantes comenzaron a representar las cantidades indicadas.

Al preguntar a los alumnos si hubo alguna dificultad al representar los números indicados, los integrantes de un equipo indicaron que no supieron cómo representar gráficamente sesenta centésimos (lo que hicieron fue tomar un cuadrado-unitario dividido en centésimos y colorearon seis partes) (Figura 5.2 a). El resto del grupo consideró que el cuadro seleccionado era adecuado ya que estaba dividido en cien partes y el número en la tarjeta estaba expresado en centésimos, sólo que había faltado colorear cincuenta y cuatro centésimos más para obtener los sesenta centésimos solicitados.

Se pidió a los demás equipos mostrar los cuadrados coloreados que representaran dicho número para compararlos con el del equipo antes mencionado. Se observó que la mayoría había utilizado el cuadrado unitario que se encontraba dividido en centésimos y habían resaltado o coloreado sesenta de los cien cuadros en que estaba dividido (Figura 5.2 b).

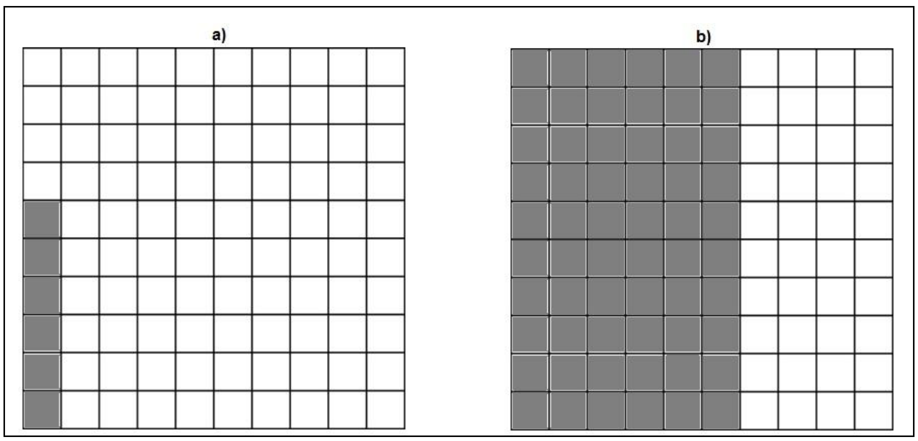


Figura 5.2. Representaciones para sesenta centésimos elaboradas por los estudiantes.

Algunos de los comentarios emitidos por el resto del grupo en relación a la duda del primer equipo mencionada fueron los siguientes:

> A-1 "*No lo colorearon correctamente*" porque *"ellos colorearon seis centésimos y eran sesenta centésimos".*
>
> *A-2 "Esta hoja sí* [refiriéndose a que el cuadrado unitario era adecuado ya que la unidad estaba dividida en centésimos]*, pero no la colorearon correctamente, les faltaron* [por colorear] *centésimos" "porque ahí está diciendo seis centésimos y no sesenta centésimos"*
>
> *A-3 "Les faltó colorear cincuenta y cuatro cuadritos* [centésimos] *más"*

Con los comentarios anteriores, el equipo que había mostrado confusión en dicha representación, aclaró las dudas que tenía y corrigió su representación.

Los integrantes del grupo refirieron que no tuvieron ninguna otra dificultad para representar los números indicados, por lo que se les preguntó si de las representaciones gráficas que hicieron del resto de los números, algunas abarcaban la misma superficie, a pesar de que se tratara de números diferentes. Los alumnos identificaron las siguientes equivalencias:

Sesenta milésimos (0.060) y seis centésimos (0.06)

Sesenta centésimos (0.60) y seis décimos (0.6)

Posteriormente se ordenaron en el pizarrón los cinco números presentados en las tarjetas y se anotó el nombre que le corresponde a cada uno

NÚMERO	NOMBRE CON LETRA
0.6	Seis décimos
0.60	Sesenta centésimos
0.006	Seis milésimos
0.06	Seis centésimos
0.060	Sesenta milésimos

Se pidió a los estudiantes comparar la representación gráfica de los primeros dos números - seis décimos (0.6) y sesenta centésimos (0.60) (Figura 5.3a), al hacerlo, pudieron observar que las representaciones gráficas en ambas cantidades correspondían a la misma porción sombreada del entero, lo cual indica que ambos números representan la misma cantidad o son equivalentes. Los alumnos identificaron que también había equivalencia entre seis centésimos (0.06) y sesenta milésimos (0.060) (Figura 5.3b).

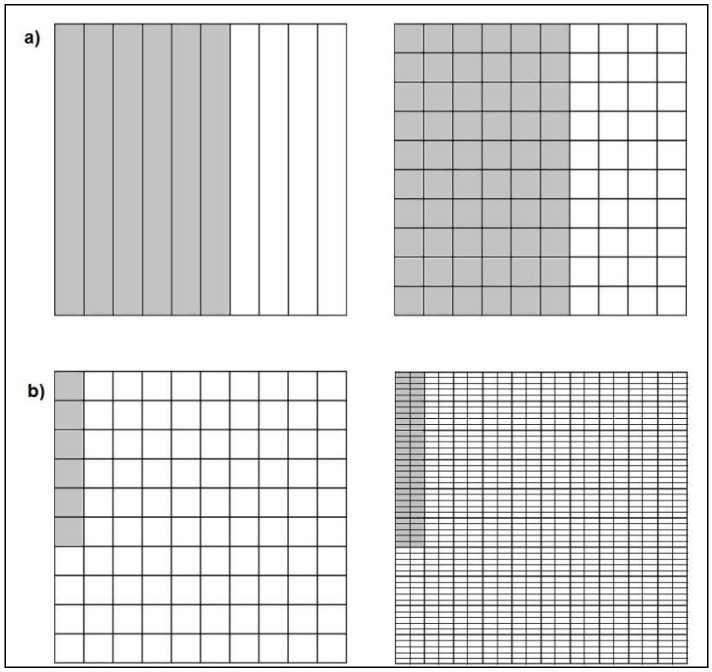


Figura 5.3. Representaciones para seis décimos y sesenta centésimos elaboradas por los estudiantes

Se observó que, en general, los alumnos no muestran dificultad para encontrar la equivalencia entre décimos, centésimos y milésimos, y que establecerla se les facilita cuando hacen uso del cuadrado unitario, ya que así logran identificar visualmente la equivalencia y/o disipar dudas.

5.1.2 Principales momentos en la comprensión de la equivalencia entre distintos órdenes de la parte fraccionaria de los números decimales.

Con la actividad realizada se identificó que la mayoría de los estudiantes reconocen con relativa facilidad la equivalencia entre dos números de igual valor expresados mediante distintos representantes de un decimal. Sin embargo, el uso del cuadrado unitario resultó una herramienta útil cuando se presentaban dudas respecto a la equivalencia existente entre dos decimales. Los estudiantes retomaron conocimientos trabajados en la primera sesión al indicar que a pesar de que dos representantes distintos tuvieran el mismo valor, a cada uno de ellos le corresponde un nombre específico que le da identidad, por lo tanto, lograron diferenciar entre equivalencia e identidad en los decimales, fortaleciendo así los conocimientos adquiridos anteriormente.

5.1.3 Dificultades persistentes en relación a la equivalencia entre distintos órdenes de la parte fraccionaria de los decimales.

En la aplicación del cuestionario final, que sirvió para identificar aquellos conocimientos sobre los decimales en que los estudiantes lograron mayor dominio y comprensión después de la realización de las actividades planteadas en la sesión 2, se encontró que el reconocimiento de la equivalencia entre diversos representantes de un número sigue presentando dificultades considerables para los estudiantes. Cabe mencionar que durante el desarrollo de la sesión 2, los estudiantes no habían mostrado grandes dificultades gracias al uso del cuadrado unitario, mismo que les permitía disipar dudas a través de la comparación visual.

Al formular preguntas como ¿Cuántos centésimos hay en tres décimos?, sólo alrededor de la mitad de los estudiantes señaló que tres décimos es equivalente a 30 centésimos, siendo cerca de una quinta parte de los estudiantes quienes no reconocen la equivalencia al mencionar que *"no puede haber centésimos en los décimos*". Lo anterior lleva a considerar que no han logrado comprender completamente las relaciones existentes entre los diversos órdenes de agrupación de la parte decimal de un número, o que continúan interpretando los décimos o centésimos como si fueran enteros de menor tamaño, sin vincularlos con la unidad.

De igual forma, cuando en el cuestionario final se pidió a los estudiantes indicar qué era mayor, si un décimo, un centésimo o un milésimo, se observó a través de las respuestas generadas, que una tercera parte de los alumnos aún considera que los milésimos son más grandes que los centésimos y décimos. Esta dificultad parecía haber sido superada al trabajar con los cuadrados unitarios, sin embargo aparece nuevamente. Estas ideas coinciden con la expresada anteriormente, donde se refleja la falta de comprensión de los órdenes de agrupación de la parte decimal, y donde se percibe también que la vinculación de la parte decimal con el entero de referencia, es una cuestión difícil de comprender.

5.2 Análisis de las sesiones correspondientes a la comparación y orden de los números decimales.

Se trabajó una sesión dedicada a la comparación y el orden entre los decimales y a identificar las estrategias que los estudiantes siguen al establecer dicho orden. Estas dos actividades (orden y comparación) se trabajaron en una sola sesión ya que son complementarias, es decir, que para que los estudiantes puedan establecer orden entre dos o más números, es necesario que los comparen.

5.2.1 Sesión 4: Orden de los decimales.

Esta idea se trabajó a través de tres actividades mediante las cuales se pretendió: a) identificar las reglas que siguen los estudiantes al establecer orden entre números decimales; b) reconocer las estrategias utilizadas para dicho fin y c) promover el uso del cuadrado unitario como herramienta para hacer la comparación y establecer el orden.

Descripción de la actividad 1: Se organizó al grupo en equipos de cinco o seis estudiantes a los cuales se les entregó un paquete de tarjetas con números que debían ordenar de menor a mayor (Figura 5.4)

Actividad 1 Ordena las siguientes tarjetas del número menor al mayor.

5.4 | 5.931 | 5.001 | 5.64 | 5.02

Figura 5.4. Actividad planteada a los alumnos.

Una vez presentada la actividad, se dio un tiempo aproximado de diez minutos para que los alumnos ordenaran las tarjetas según consideraran correcto. Después de este tiempo, los equipos presentaron al resto del grupo el orden obtenido; sólo un equipo ordenó los números de forma distinta (Figura 5.5b) al resto de los equipos (Figura 5.5a).

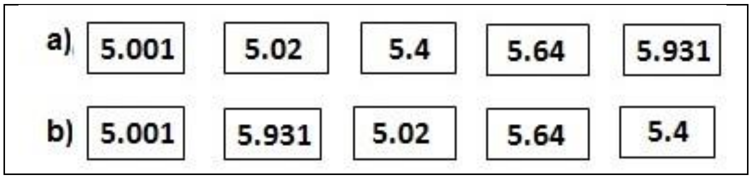


Figura 5.5. Resultados obtenidos por los estudiantes al ordenar de menor a mayor los números.

La mayoría de los equipos ordenaron de la forma que se muestra en el inciso a de la figura 5.5. Una vez presentados los resultados al grupo, se les solicitó que explicaran a los compañeros cuáles habían sido los criterios utilizados para llegar a dicho orden. Los argumentos dados para justificar el orden asignado a los números son los siguientes:

> *E-1 "Nos fuimos por el primer número después del punto y nos dimos cuenta que era cero, cero, cuatro, seis…"*

Lo que estos alumnos intentaban expresar es que el primer número después del punto les había servido para identificar cuál cantidad era menor que otra, aclarando que:

> *E-1 "Con ese número ya supimos cuál número era mayor"*

Al parecer, intentaban explicar que el primer número después del punto correspondía a los décimos, mismos que eran mayores que los centésimos y los milésimos y por tal motivo compararlos les permitía establecer el orden en dichos números, ya que después comentan:

> *E-1 "Observamos también en el segundo número [cuando la primera cifra después del punto era igual], porque ahí en la primera [cifra] como está… para que sepamos cuál es mayor y cuál es menor tuvimos que ver en esa* [la segunda cifra]".

Es decir, cuando en dos o más números la cifra que ocupa el primer lugar después del punto es igual, los niños recurren a observar el segundo número después del punto y así logran identificar cuál número es mayor o menor que otro.

Otra estrategia utilizada por los estudiantes para establecer el orden se refleja en el siguiente comentario:

> *E-2 "Vimos que los milésimos son menores que los centésimos, aquí hay dos centésimos (señalando el segundo número [ver figura 5.5b] y aquí hay un milésimo, éste lo pusimos primero [señalando el primer número] y aquí [tercer número} son cuatro décimos y aquí [cuarto número] son seis y aquí son nueve [décimos] (último numero) por eso los ordenamos así"*

El equipo que hizo el comentario anterior, si bien es cierto que consideró el primer número después del punto para determinar el orden de las tarjetas y en el caso de números que comenzaban con la misma cifra, recurrían a la segunda cifra para determinar el orden. También hacen uso de la equivalencia entre decimales al identificar por ejemplo, que un milésimo es menor que dos centésimos y que cuatro décimos es menor que seis y nueve décimos, situación que refleja la mayor comprensión que tienen del valor de los decimales para resolver las tareas de ordenación.

La mayoría de los equipos dieron argumentos similares a los aquí presentados, a excepción de uno que estableció un orden distinto entre los números el inciso b de la figura 5.5. Al solicitar a los integrantes del equipo que explicaran el procedimiento utilizado para obtener dicho orden, expusieron lo siguiente:

> *E-2 "…primero nos guiamos por las cantidades, por ejemplo, 5 enteros 1 milésimo y así nada más agarramos los demás…* (no supo explicar)…,
>
> *E-2 "…Es que creo que nos equivocamos, ésos dos* [números] *iban al revés* (se refiere a que debían cambiar de lugar los primeros números)*"* Figura 5.6.
>
> *E-2 "Observamos los milésimos, los milésimos son los menores porque aunque estén más grandes las cantidades, cuando los*

representas son menos y ya después van los centésimos y hasta el final los décimos"

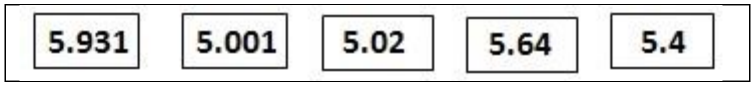


Figura 5.6. Orden obtenido por un equipo después de efectuar modificaciones.

La mayoría de los alumnos del resto del grupo comentaban entre sí, aludiendo a que los números se encontraban mal ordenados, lo cual provocaba que el equipo se mostrara inseguro y se abstuvieran de exponer sus razonamientos. Al preguntar si estaban de acuerdo con la última idea expresada, la mayoría se mostró en desacuerdo, sin embargo surgió un comentario importante:

> A-1 *"… Dependiendo… si lo represento en gráfica* [refiriéndose a representar el número en el cuadrado unitario]*, podemos saber si es mayor o menor que otro".*

En el comentario anterior se proponía hacer uso del cuadrado unitario como herramienta para mostrar que no en todos los casos un número que contiene milésimos es menor que los expresados en décimos y centésimos.

Descripción de la actividad 2: Después del comentario anteriormente descrito, se propuso a los estudiantes representar, mediante diversos cuadrados unitarios (divididos en décimos, centésimos o milésimos), los números antes ordenados. Esto con el fin de averiguar si la afirmación de que los milésimos siempre corresponden a cantidades menores era correcta o no. En equipos colorearon la parte menor que la unidad correspondiente a cada número, obteniendo los resultados mostrados en la figura 5.7.

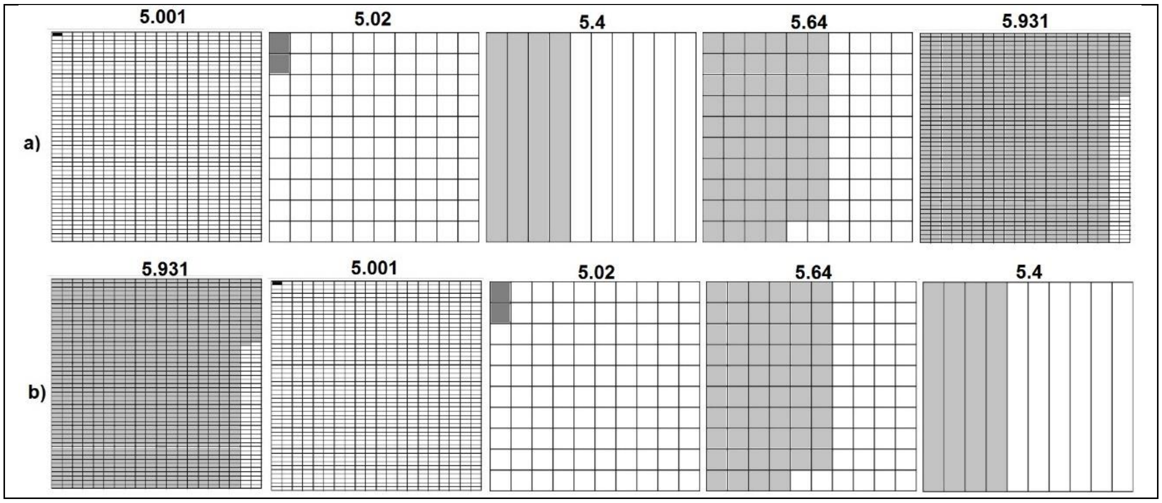


Figura 5.7. Representación de la parte menor que la unidad de cada número ordenado.

Al hacer las representaciones en el cuadrado unitario, los estudiantes consideraron innecesaria la representación de los cinco enteros, al reconocer que correspondían a 5 cuadrados completos, por ello, representaron solamente la parte menor que la unidad.

La mayoría de los equipos obtuvo las representaciones mostradas en la figura 5.7a, estas representaciones permitieron, a través de la observación de la parte sombreada en cada una, verificar si el orden previamente establecido era correcto o no. En este caso observaron que el área sombreada en el primer cuadro era menor al área sombreada en el segundo cuadrado unitario, y así sucesivamente, hasta llegar al quinto cuadro, donde el área sombreada era mayor que en los anteriores, percatándose así, que los números habían quedado ordenados de forma adecuada, del menor al mayor. El equipo que había mostrado confusión respecto al orden de los números obtuvo la representación mostrada en la figura 5.7b, los integrantes de este equipo habían considerado que los milésimos siempre iban a ser menores que los décimos y centésimos, pero al observar que su resultado no coincidía con el obtenido por todos los demás equipos, compararon el orden de las representaciones en los cuadrados unitarios de los otros equipos y el que ellos habían obtenido. De esta manera observaron que las áreas sombreadas en sus cuadrados unitarios, no seguían el orden solicitado de menor a mayor, con ello lograron identificar los errores, cuestión que se reflejó en los comentarios emitidos:

> *E-2 Primero es 5.001 porque el primer número después del punto es cero y pusimos primero* [5.931] *el nueve* [el primer número, entonces] *es más grande".*

Hasta este momento, los estudiantes habían identificado que nueve décimos es mayor que cero décimos por lo que 5.931 era mayor que 5.001 así que colocaron el 5.001 como el número menor. Al solicitarles colocar la cantidad que iría después de 5.001, el equipo colocó 5.931, pero el resto del grupo identificó inmediatamente que no era ese número el que correspondía, expresando que:

> *A-2 "5.931 es más grande o mayor que todos los demás…"*

La idea que persistía en el equipo antes mencionado era que los números que contienen milésimos siempre van a ser los más pequeños, debido a que un milésimo es menor que un centésimo y que un décimo. Lo que no estaban considerando hasta ese momento es la cantidad de milésimos que hay en el número, esto a pesar de tener las representaciones gráficas en los cuadrados unitarios. Al preguntar al grupo, una vez finalizada la actividad, si las cantidades que incluyeran milésimos siempre serían las más pequeñas, se obtuvieron respuestas como:

> *A-3 "No, porque* [los milésimos] *pueden representar mayor cantidad…*"

> *A-4 "Algunas veces los milésimos pueden ser más grandes que* (los décimos y centésimos)*".*

Estos alumnos estaban haciendo referencia a que se necesita observar la cantidad de milésimos que hay en un número para poder determinar si es mayor o menor que algún otro número.

Posteriormente se pidió al equipo que observara la parte sombreada en cada cuadrado unitatio y con esa información ordenaron nuevamente los números dados, llegando finalmente al orden que se había establecido en el resto de los equipos. Se retomó la idea de que al ordenar decimales, el pensar que los milésimos son más pequeños no siempre es útil, por lo que se debe prestar atención a lo que representa cada número (al valor absoluto de cada cifra por el valor relativo correspondiente a cada columna).

Descripción de la actividad 3: En continuidad con la actividad anterior y con el fin de identificar las dificultades persistentes a las que se enfrentan los estudiantes al comparar decimales y establecer orden entre ellos, se entregaron por equipos de cinco o seis estudiantes, paquetes de tarjetas con números decimales para ordenarlos de menor a mayor (Figura 5.8). La indicación en esta ocasión fue utilizar el material o la estrategia que consideraran necesario para asegurar que el orden fuera el correcto.

7.3	7.238	7.15	7.08	7.009

Figura 5.8. Números para establecer orden entre ellos.

En esta ocasión se obtuvo el mismo orden (correcto) en todos los equipos (Figura 5.9), los cuales utilizaron el cuadrado unitario desde el inicio de la actividad para representar la parte menor a la unidad de los números propuestos.

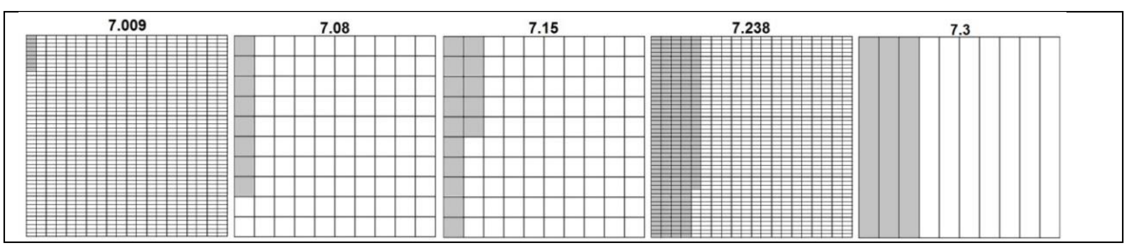


Figura 5.9. Orden establecido y representaciones gráficas elaboradas por los estudiantes.

Algunos de los argumentos expresados al justificar el orden establecido fueron:

> *E-1 “Primero ordenamos las tarjetas, después coloreamos los cuadritos* [para verificar] *y vimos que sí habían quedado bien ordenadas las tarjetas”.*

> *E-3 "Lo primero que nosotros hicimos fue que acomodamos las tarjetas pero acomodamos éstas mal* (señalando las últimas dos tarjetas que en un primer momento habían colocado de forma inversa, primero 7.3 y después 7.238), *después coloreamos* [la parte decimal en los cuadrados unitarios]) *y vimos que 7.3 era el mayor…"* corrigiendo el orden de las tarjetas. (Ver figura 5.9)

> *E-4 "Las ordenamos* [las tarjetas] *y desde el principio estaban bien, ya después coloreamos* [la parte decimal en los cuadrados unitarios] *y verificamos"*

> *E-5 "Nos fijamos en los cuadritos o gráficas* (refiriéndose al cuadrado unitario) *y empezamos a pintar dependiendo de los números que estaban* (parte decimal de cada número) *y ya después fuimos viendo dónde iba cada uno por lo coloreado…"*

Solamente un equipo ordenó las tarjetas en el orden antes mencionado pero sin hacer uso del cuadrado unitario, sino prestando atención al valor de la primer cifra después del punto, tal como se observa en el siguiente comentario:

> E-6 "*Nos fuimos guiando por la cantidad de números que tiene, como está al principio el cero, luego otro cero y luego el nueve* (señalando la primer cantidad)*"*

El equipo antes mencionado ordenó las tarjetas considerando el valor del primer número después del punto, cuando dos cantidades empezaban con el mismo número consideraban el siguiente para determinar el orden, esta estrategia les pareció suficiente para asegurar el orden correcto.

Respecto al equipo que en la actividad número uno había ordenado considerando que los milésimos siempre serán menores a los décimos y centésimos, sin importar la cantidad de ellos que hubiera en un número, en esta actividad ordenaron correctamente y explicaron lo siguiente:

> *E-2 "Acomodamos los números de menor a mayor y nos guiamos por éste que es el número más alto* (mayor) *y coloreamos los tres* décimos [señalando la última tarjeta]*… Primero ordenamos las tarjetas y vimos que no coincidían* (es decir, algunas cantidades estaban mal colocadas), *ya después vimos los cuadritos* (las partes coloreadas en cada cuadrado unitario) *y ya lo cambiamos"*

En el comentario anterior se observa que con ayuda de la representación gráfica de la parte decimal mediante el cuadrado unitario, los alumnos pudieron ordenar correctamente los números.

En general, en este punto del proceso, los estudiantes no mostraron dificultades importantes para comparar dos o más números y establecer orden entre éstos, por lo que, con la finalidad de generar otros razonamientos en los estudiantes, se planteó la situación siguiente: "Un niño en otra ocasión consideró la cantidad de cifras después del punto que tenía un número, como elemento para establecer el orden".

Se comentó que el niño referido ordenó las tarjetas de acuerdo al número de cifras después del punto, colocando primero los que tenían una, después los que tenían dos y al final los que tenían tres cifras después del punto, en el caso de 7.009 y 7.238, había colocado primero al 7.009 porque el 9 es menor que 238 (Figura 5.10).

7.3	**7.08**	**7.15**	**7.009**	**7.238**

Figura 5.10. Orden establecido por el niño utilizado como ejemplo.

Se preguntó a los estudiantes si consideraban que ese orden era adecuado o no y por qué, ante lo que se obtuvieron las siguientes respuestas:

A-1 "No, porque tres décimos es más cantidad que 238 (milésimos)"

A-2 "Si los tenía que ordenar de menor a mayor, el 7.3 tendría que ir al último porque es el más grande…"

En las respuestas se hace referencia a que el número que estaba al inicio de la secuencia, aunque tuviera una sola cifra después del punto, representaba una cantidad mayor que el que había colocado al final como número mayor por tener varias cifras después del punto.

La mayoría de los alumnos reconocía que el considerar la cantidad de cifras como elemento determinante para ordenar los números decimales no es del todo correcto, ya que nos puede llevar a obtener resultados erróneos. Sin embargo una alumna comentó:

> *A-3 "Ahorita que lo dijo como que me cuestioné un poco porque… a lo mejor…* [se pueden ordenar] *conforme a los números después del punto o* [conforme a] *lo que representan* [que] *es diferente. Entonces [tengo duda sobre] ¿Cómo debemos ordenarlos, conforme a lo que representan o conforme están los números?.*

Esta alumna consideraba que ambas eran formas útiles para ordenar, ello le generaba duda. Al preguntar al resto del grupo cuál consideraban que era la forma más adecuada para ordenar los números y obtener un resultado correcto según se solicite, de mayor a menor o viceversa, comentaron que lo adecuado era considerar lo que representa la parte menor a la unidad, siempre y cuando la parte entera sea igual en los dos números, de lo contrario, ésta también deberá ser considerada.

Se presentó posteriormente el ejemplo de otro alumno que con la secuencia de tarjetas utilizadas en la actividad uno (Ver figura 5.4) obtuvo el mismo resultado que se había obtenido en el grupo (Figura 5.5 a), pero sus argumentos eran distintos, ya que argumentaba haber tomado en cuenta únicamente el valor de las cifras después del punto, considerando que el 1 es más pequeño que el 2 (sin considerar los ceros en 5.001, ya que da por hecho que al igual que sucede con los naturales, éstos carecen de valor al encontrarse a la izquierda del número), el 2 es más pequeño que el 4 y así sucesivamente, es decir, guiándose por las reglas que se utilizan en los números naturales (Figura 5.11).

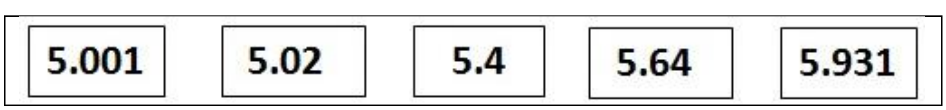


Figura 5.11. Orden establecido por el niño utilizado como ejemplo.

Se preguntó si consideraban adecuada o no la estrategia de su compañero para determinar el orden. La mayoría del grupo respondió que no.

> A-4 “…*porque cuando se hace eso vas a estar mal porque en realidad el número que parece más grande, va a ser más chiquito…”*

En el comentario anterior se hace evidente una probable (y reiterada) interpretación de que en los decimales, los números que contengan milésimos siempre serán más pequeños que los que contengan sólo centésimos o décimos sin importar el número que representen, es decir, consideran en todos los casos que, entre mayor parezca un número (según las reglas aplicadas a los naturales), menor será el valor que represente, porque las partes representadas son más pequeñas, lo cual no significa que esa idea sea correcta.

Se destacó en el grupo que al menos en el ejercicio anterior, azarosamente el alumno del ejemplo había obtenido un resultado correcto al ordenar las tarjetas, a pesar de que su razonamiento no fuera el adecuado. Una alumna comentó que:

> *A-5 “…a lo mejor sí le llegue a dar la respuesta correcta, pero si lo sigue haciendo así* (puede cometer errores), *por ejemplo si ordena las (tarjetas) del siete, le quedará primero 7.3, luego 7.08, y así…”,*

Dicha alumna se refería a que con los números utilizados en la tercera actividad no se obtendría el orden correcto si se ordenaran considerando el valor de las cifras después del punto como si fueran naturales, por lo que de forma grupal se decidió ordenar los números indicados siguiendo las reglas consideradas por ese alumno, y observar si el resultado obtenido sería correcto o incorrecto (Figura 5.12).

7.3	7.08	7.009	7.15	7.238

Figura 5.12. Orden establecido siguiendo la lógica utilizada por el niño que se utilizó como ejemplo para generar otro tipo de razonamientos en los estudiantes.

Una vez que se ordenaron las tarjetas y se observó que el resultado obtenido era incorrecto, se concluyó que tomar las cifras después del punto como si fueran números naturales como elemento determinante para establecer orden no conduce a la obtención del orden correcto, aunque puedan presentarse casos azarosos como el ejemplo mostrado en la figura 5.11 donde casualmente coincidió el orden. El considerar únicamente la cantidad de cifras después del punto tampoco nos llevará a establecer el orden adecuado, por lo que es más conveniente considerar lo que representa esa parte decimal cuando la parte entera sea igual, o considerar el número completo incluyendo a los enteros, cuando éstos sean distintos y de ser necesario verificar con el cuadrado unitario.

5.2.2 Principales momentos en la comprensión de la comparación y orden de los decimales.

La mayoría de los estudiantes logra comprender que hacer uso de las reglas aplicadas a los números naturales no siempre es útil con los números decimales. Un aspecto relevante es que comienzan a relacionar los distintos órdenes (décimos, centésimos y milésimos) de la parte fraccionaria con la unidad, sin embargo, esto no es suficiente para una comprensión más amplia de los decimales, ya que existe una minoría de estudiantes que formulan ideas totalmente contrarias a las que funcionan con los números naturales, llegando a considerar que en los decimales, los milésimos siempre representarán a los números más pequeños y los décimos a los más grandes.

El uso del cuadrado unitario resultó ser de gran utilidad, ya que facilitó a los estudiantes la comparación entre dos números, al permitirles realizar la representación gráfica de ellos y visualizar con mayor facilidad el valor de los mismos. A su vez, permitió que los estudiantes eliminaran dudas como las mencionadas en el párrafo anterior, al permitirles verificar que existen números del órden de los milésimos cuyo valor puede ser menor o mayor que un décimo o centésimo.

La mayoría de los estudiantes reconoce que al ordenar decimales es necesario considerar el valor total del número indicado o lo que éste “representa” más que seguir estrategias como considerar a los números después del punto como a un conjunto de números naturales o por la cantidad de cifras que éste incluye. Se observó que para lo anterior, el uso del cuadrado unitario fue muy importante, ya que permitía a los estudiantes visualizar el valor real de la parte decimal de un número.

5.2.3 Dificultades persistentes en relación a la comparación y orden de números decimales.

En el cuestionario final se plantearon tres preguntas relacionadas con el orden entre números decimales, las cuales permitieron identificar el dominio que al respecto alcanzaron o no los estudiantes. En las respuestas de los alumnos se hicieron presentes algunas dificultades que no se habían mostrado en la sesión en la que se trabajó este aspecto, encontrando que cerca del 25% de los estudiantes siguen considerando que los milésimos son más pequeños que los centésimos y los décimos, sin tomar en cuenta la cantidad de éstos que hay en un número, ello a pesar de que con anterioridad a la aplicación del cuestionario se había discutido esta idea, y los estudiantes habían llegado a la conclusión de que es importante considerar el valor total del número (es decir, el valor obtenido mediante la suma del valor de cada cifra mediante su valor absoluto y relativo) y no guiarse solamente por la cantidad de cifras

Hay también unos pocos estudiantes que ordenan los decimales siguiendo las reglas aplicadas a los naturales, es decir, considerando las cifras a la derecha del punto como números naturales u ordenando de forma indistinta, sin que se observe la aplicación de algún tipo de reglas en las estrategias utilizadas para ordenar. Finalmente consideramos necesario enfatizar el trabajo en los aspectos antes mencionados, a fin de que los estudiantes afiancen y adquieran nuevos conocimientos de forma permanente.

Capítulo 6.

Resultados:

-Distintas representaciones de los decimales.

CAPÍTULO 6. RESULTADOS

• DISTINTAS REPRESENTACIONES DE LOS DECIMALES.

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en la investigación realizada, en relación al reconocimiento de diversas representaciones que se pueden utilizar para un decimal.

6.1 Análisis de las sesiones correspondientes a las distintas representaciones de los decimales.

En este rubro se trabajaron dos sesiones con la finalidad de que los estudiantes identificaran diversas formas de representar los números decimales, además de la representación de la forma $\frac{a}{b}$, la representación con punto y la representación gráfica en el cuadrado unitario trabajado en sesiones anteriormente descritas.

6.1.1 Sesión 5: Diferentes representaciones de los decimales.

En esta sesión se trabajaron tres actividades cuyo objetivo era que los estudiantes reconocieran las distintas formas de representar un número decimal a partir de la idea de equivalencia.

Descripción de la actividad 1: Se organizó a los estudiantes en 6 equipos, entregándoles tarjetas con números decimales y sus representaciones en superficies fraccionadas con la finalidad de que establecieran equivalencias entre los dos grupos de tarjetas (Figura 6.1)

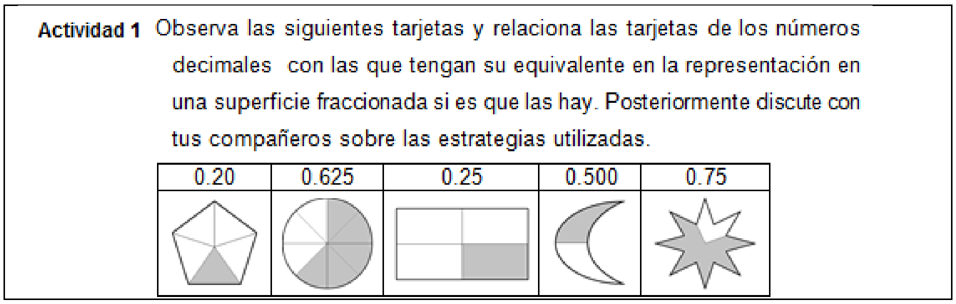


Figura 6.1. Actividad presentada a los estudiantes.

Se destinó un tiempo de aproximadamente 15 minutos para que en equipos determinaran si existía o no equivalencia entre las tarjetas con números y las que contenían figuras o áreas sombreadas, cada equipo pegó en alguna parte del salón sus tarjetas según consideraron, de tal forma que fueran visibles para el resto de los equipos. Posteriormente se presentaron los resultados obtenidos y se discutieron. Es decir, cada equipo explicaba a sus compañeros la forma en que realizaron la actividad y los razonamientos que se habían generado al interior del equipo para que sus compañeros pudieran aportar o confrontar sus ideas en caso de estar en desacuerdo.

Uno de los equipos (equipo 6) presentó las relaciones que logró establecer (figura 6.2) explicando la forma en que relacionaron las tarjetas:

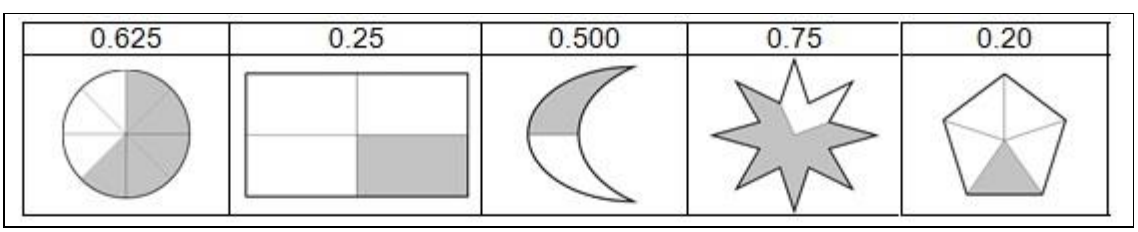
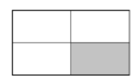


Figura 6.2. Relaciones de equivalencia establecidas por el equipo seis.

E-6 "Primero sacamos ésta [0.625 con la figura del círculo], *saqué la fracción decimal y la dividí y me salió 0.625… es que podemos hacer una fracción decimal y al dividirla nos da un número decimal… por* *eso saqué la fracción y dividí 8 entre 5 para obtener el resultado de 0.625…"*

Cuando el alumno menciona que sacó la fracción decimal, refiere que observó la imagen de la superficie fraccionada y la tomó como *tantos de tantos*, en este caso como 5 de 8, lo que se transforma en $\frac{5}{8}$, con ello pudo realizar la división de 5 entre 8, sólo que al momento de explicar confundió el orden de la división y lo mencionó a la inversa (ocho entre cinco). Se revisó que todos los equipos hubieran relacionado las mismas tarjetas y se observó que sólo un equipo tenía un resultado diferente en esa tarjeta, mismo que más adelante se comentará.

Se pidió a este mismo equipo que comentara con qué tarjeta había relacionado la que contenía el rectángulo  y cuál fue la estrategia que habían empleado, a lo que una alumna del equipo mencionó:

E-6 "Yo iba sumando 25 + 25 + 25 + 25 para que me diera el cien".

Refiriendo a que como la figura estaba dividida en cuatro partes iguales, ella consideró que era igual a cien (probablemente centésimos, o 100%), y que entonces cada una de las partes en que estaba divida correspondía a 25, mismos que consideró como 0.25. Los demás equipos estuvieron de acuerdo con el procedimiento utilizado, pero se solicitó comentar alguna otra estrategia que hubieran seguido en algún otro equipo por lo que el equipo 2 comentó que ellos utilizaron el procedimiento de dividir 1 entre 4 para obtener el número decimal que corresponde, lo que coincide con el procedimiento mencionado en el equipo anterior (obtener la fracción que representa la figura y hacer la división correspondiente, en este caso $\frac{1}{4}$). El equipo 4 también comentó su estrategia:

E-4 "Nosotros dividimos 100 entre 4 y nos salió 0.25 centésimos"

Ellos consideraron que el entero valía cien centésimos y sólo los dividieron entre 4, porque en esas partes estaba dividido el entero, fue así que encontraron que cada parte equivalía a 25 centésimos, relacionando así la figura del rectángulo con la tarjeta de 0.25.

Respecto a la figura de la luna, el equipo seis comentó que la relacionó con el número 0.500

> *E-6 "porque es la mitad de un entero, entonces aquí la luna está dividida a la mitad y está coloreada una parte"*

Refiriéndose a que habían considerado que la figura completa representaba al entero o los mil milésimos y que al estar sombreada sólo la mitad, ésta correspondía a los quinientos milésimos. El equipo 4 comentó que siguió la misma estrategia al considerar:

> *E-4 "Como si fueran mil, pero como está repartido a la mitad, dejamos 0.500 que es la mitad".*

Hasta ese momento los comentarios de los estudiantes no mostraban dificultades para establecer equivalencias entre las diversas representaciones de un decimal, por lo que se continuó con la tarjeta del pentágono, la cual el equipo cuatro relacionó con 0.20 al comentar que:

> *E-4 "nosotros le hicimos más fácil… nada más hicimos como si esto* (el pentágono) *fuera cien y cada una de éstas* [señalando cada una de las partes en las que está dividido el pentágono] *representa veinte, así le hicimos, 20, 40, 60, 80, 100* [señalando cada una de las partes] *y ya, aquí pusimos sólo veinte centésimos".*

La mayoría de los equipos comentaron que habían unido esas mismas tarjetas y estuvieron de acuerdo con el procedimiento utilizado por sus compañeros, pero el equipo 1 comentó que habían unido la figura del pentágono con otra tarjeta, es decir, que ellos habían obtenido otras relaciones (Figura 6.3).

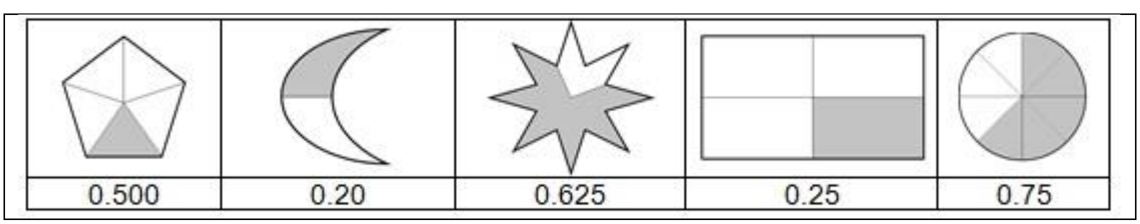


Figura 6.3. Relaciones de equivalencia establecidas por el equipo uno.

Este equipo unió la figura del pentágono con la tarjeta de 0.500, al cuestionarles sobre el motivo de su elección, una alumna dijo:

> *E-1 "… es que [mis compañeras de equipo] se guiaron por los cuadros"*

Refiriéndose a que había observado que la figura estaba dividida en 5 partes y buscaron una tarjeta que tuviera el número 5 para poder relacionarlas. Probablemente lo mismo sucedió con la figura de la luna que estaba dividida en 2 partes iguales y la relacionaron con el número decimal que contenía el número 2, aunque no se observa una regularidad en las demás figuras donde sólo unieron adecuadamente el rectángulo con el número 0.25.

Al escuchar la respuesta de las alumnas del equipo, los demás equipos indicaron que la estrategia que habían utilizado no era la adecuada.

> *A-1 "porque no se tienen que guiar por los cuadros* (refiriéndose a las partes en las que está dividida una figura)*, se tienen que guiar por… la cantidad"*

> *A-2 "si ahí pusieron quinientos milésimos tenía que ser la mitad de la figura* (la que estuviera sombreada)*"*

> *A-3 "porque son milésimos y 500 + 500 son mil, y quinientos es la mitad de mil"*.

Aquí se observa que los alumnos comienzan a hacer ciertas generalizaciones al identificar que 0.500 siempre va a corresponder a la mitad de un entero al referirse a la mitad de la figura.

El equipo 3, que relacionó las tarjetas de igual forma que el equipo 6 (figura 6.2) continuó con la explicación y comentó lo que hicieron para identificar el número que correspondía a la figura de la estrella.

> *E-3 "Vimos las partes iluminadas y las partes que sobraban* (refiriéndose a que obtuvieron la fracción que corresponde a la figura [$\frac{6}{8}$]) *entonces eso lo dividimos y nos salió 0.75"*

Se observa que este equipo realizó el cambio de la representación en una superficie fraccionada a la representación mediante fracción, para poder así encontrar el número decimal que le corresponde a través de una división, estrategia que ya había sido comentada por los equipos 2 y 6. Respecto a esa figura, el equipo 5 comentó que ellos comenzaron a ordenar las primeras tres tarjetas (el círculo, el rectángulo y la luna con los números 0.625, 0.25 y 0.500 respectivamente) y que al final les quedaron las figuras del círculo y de la estrella con los números 0.75 y 0.625, mismas que no sabían cómo relacionar así que:

> E-5 "*empezamos a contar las puntas [de la estrella] y eran ocho* [refiriendo que la imagen de la estrella estaba dividida en 8 partes] *y el círculo también eran ocho* (partes), *pero observé que ahí* (estrella) *sobraban dos y ahí* (círculo) *tres entonces pensé que éste* (la estrella) *era más grande que la otra* (círculo) *y por eso las pusimos así".*

A pesar de que se identifica que el razonamiento del equipo es correcto para identificar cuál de las 2 figuras representa una cantidad mayor, al momento de colocar las tarjetas se colocan de forma inversa, es decir, probablemente el equipo se guió por las reglas aplicadas a los números naturales y consideró que 0.625 es una cantidad mayor que 0.75. Al preguntar al resto del grupo sobre cuál de las dos cantidades es mayor, la mayoría de los alumnos identifican 0.75 como una cantidad mayor que 0.625, por lo que se debe relacionar la estrella con la tarjeta de 0.75. El equipo dos comentó la estrategia seguida:

> *E-2 "…dividimos seis entre ocho y nos salió 0.75* (realizaron la operación en el pizarrón)*"* (figura 6.4)

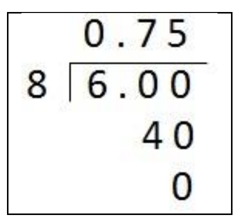
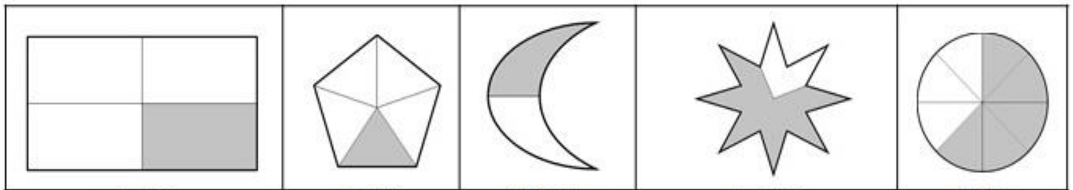


Figura 6.4. División realizada por el equipo cinco.

Posteriormente se preguntó a los alumnos si había alguna otra forma de representar los números decimales que tenían en las tarjetas, a lo que respondieron que en forma de fracción, escribiendo en el pizarrón algunas fracciones que ellos consideraban equivalentes a los números indicados (Figura 6.5 a).



	0.25	0.20	0.500	0.625	0.75
a)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{625}{1000}$
b)	$\frac{25}{100}$				$\frac{5}{8}$
c)					$\frac{6}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}$

Figura 6.5. Otras representaciones agregadas por los estudiantes.

Al preguntar a los estudiantes por qué habían elegido esas fracciones, justificaban haber escogido la fracción en función de la imagen.

> "*Escogimos* $\frac{1}{2}$ *porque es la mitad y se está tomando una* (parte) *de dos,* $\frac{1}{4}$ *porque se está tomando una* (parte) *de cuatro,* $\frac{6}{8}$ *porque está dividido en ocho y tomamos seis partes,* $\frac{1}{5}$ *porque está dividido en cinco y tomamos una parte".*

Hasta este momento las fracciones propuestas por los alumnos están en función de la imagen, idea que se rompe en el último ejemplo, donde se colocó una fracción decimal, al preguntar si era correcta esa representación, los alumnos en un primer momento respondieron que no:

> *A-4 "Porque es una fracción decimal"*
>
> *A-5 "No representa lo mismo que las demás"*

Algunos alumnos comienzan a dudar si la representación es correcta o no, hasta que otros comentan que sí es equivalente a las representaciones anteriores y que son correctas:

> *A-6 "Porque son milésimos y agarramos seiscientos veinticinco"*
>
> A-7 "*Porque mil milésimos es un entero, entonces nada más agarraron 625"*

Con estos comentarios, la mayoría de los alumnos identificó que la fracción $\frac{625}{1000}$ si representaba lo mismo que la superficie marcada en el círculo y que el número 0.625.

Al solicitarles buscar otra representación diferente, los alumnos agregaron otras representaciones decimales (Figura 6.5 b y c) donde se observa que hacen representaciones utilizando la descomposición de un número, fracciones decimales o con su equivalente en fracción con algún otro denominador, lo cual da muestra de que comienzan a reconocer que existen variedad de formas para representar un decimal.

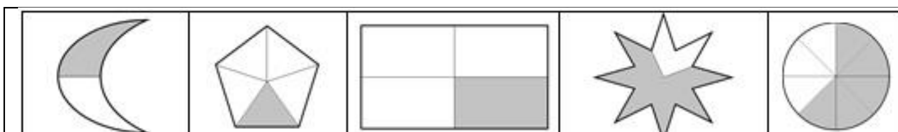
Descripción de la actividad 2: La organización de los estudiantes se mantuvo como en la actividad anterior: en 6 equipos de trabajo a los cuales se entregaron otras tarjetas con representaciones mediante fracciones (Figura 6.6) para que, si era posible, las relacionaran con el par de tarjetas que ya tenían.

$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{15}{24}$

Figura 6.6. Tarjetas entregadas a los estudiantes.

Después de un tiempo aproximado de 10 minutos en que los estudiantes discutieron al interior de los equipos la forma en que podrían o no agregar las tarjetas, se comenzó con la discusión grupal donde el equipo 2 inició presentando sus respuestas (Figura 6.7) y comentando que unieron la tarjeta de la luna que ya estaba con la de 0.500 con la tarjeta de $\frac{3}{6}$.

> *E-2 "porque vimos que tres es la mitad de seis y como esto* (parte sombreada de la figura) *es la mitad de la luna, las pusimos juntas"*



0.500	0.20	0.25	0.625	0.75
$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{15}{24}$

Figura 6.7. Resultados del equipo dos.

Los demás equipos estuvieron de acuerdo en relacionar dichas tarjetas, sólo que el equipo seis había utilizado otro procedimiento:

> *E-6 "Nosotros buscamos la fracción equivalente y vimos que $\frac{1}{2}$ es lo mismo que $\frac{3}{6}$".*

En relación con la tarjeta del rectángulo y el número 0.25, el equipo dos agregó la tarjeta de $\frac{3}{12}$ argumentando que:

> *E-2 "Sólo buscamos la equivalencia, es que yo lo multipliqué… porque los cuadritos pensé que eran de tres, así 3, 6, 9, 12 (señalando cada una de las cuatro partes en que estaba dividido el rectángulo)"*

Haciendo referencia a que consideraron que cada una de las 4 partes en que estaba dividido el rectángulo podía subdividirse en 3 partes, de tal forma que la figura completa estuviera dividida en 12 partes iguales y quedaran sombreadas 3, obteniendo así los $\frac{3}{12}$. Los demás equipos estuvieron de acuerdo con dicha relación.

El equipo 6 comentó haber relacionado al pentágono y al número 0.20 con la fracción $\frac{3}{15}$:

> *E-6 "porque la tercera parte de quince es cinco y tres por cinco es quince…, como está dividido en cinco, lo multiplicamos por tres que es el número de arriba…"*

El razonamiento utilizado en este equipo fue similar al empleado por el equipo anterior aunque al momento de explicar, no lo hacen de manera clara, pero se entiende que consideraron que cada una de las 5 partes que forman el pentágono estaba dividida en 3, fue ahí donde realizaron la multiplicación de 3 por 5 igual a 15, encontrando que finalmente quedaban sombreadas 3 de las 15 partes obtenidas.

La mayoría de los otros equipos estuvo de acuerdo en relacionar las tarjetas antes mencionadas, pero el equipo 3 mencionó que ellos tenían un orden distinto (Figura 6.8), ya que los $\frac{3}{15}$ los unieron con el número 0.75 y el círculo porque:

E-3 “nosotros multiplicamos, bueno…porque 3, 6, 9, 12,15 (señalando las partes sombreadas), *son cinco partes las que están tomadas…”*

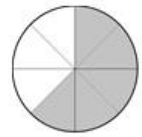
	
0.20	0.75
$\frac{15}{24}$	$\frac{3}{15}$

Figura 6.8. Resultados del equipo tres.

Es decir, observaron que en el círculo estaban sombreadas 5 partes y consideraron que cada una de éstas podía dividirse en 3 partes, obteniendo un total de 15 partes sombreadas, con ello establecieron la relación con los $\frac{3}{15}$ sin darse cuenta que debían considerar la figura completa que estaba dividida en octavos y que en caso de dividir cada parte en 3, se obtendría un total de 24 partes iguales y no 15 como estaban considerando.

Este mismo equipo comentó que el pentágono lo habían relacionado con la fracción $\frac{15}{24}$ (Figura 6.8), por lo que se inició la discusión de forma grupal, al preguntar a los equipos cómo habían relacionado las tarjetas, solamente 2 equipos habían relacionado la tarjeta de $\frac{3}{15}$ con la figura del círculo. Se preguntó al grupo en general, cuál de las respuestas consideran correcta, obteniendo respuestas como las siguientes:

A-8 “Yo creo que $\frac{3}{15}$ va con la del pentágono porque ellos dijeron que multiplicaron y ahí (en el círculo) son ocho partes, entonces 3x8 es 24 y no sale 15, entonces en éste (pentágono) es 3x5 y nos da 15…”

A-9 “$\frac{3}{15}$ debe ir en el pentágono y $\frac{15}{24}$ en el círculo porque lo que nosotros hicimos fue dividir cada parte del círculo en tres, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 y 24 y aquí la parte que nos va a dar (parte sombreada) representa 15 y en total son 24, por eso es $\frac{15}{24}$”

Con las explicaciones anteriores, los 2 equipos que habían relacionado de forma diferente las figuras y las fracciones identificaron los errores cometidos al reconocer que no habían considerado a la figura completa (círculo), lo que había generado que relacionaran de forma incorrecta las fracciones, procediendo a realizar las correcciones necesarias.

Finalmente se comentó la tarjeta de $\frac{6}{8}$, que el equipo 5 mencionó haber relacionado con la estrella y el número 0.625

> *E-5 "porque la estrella está dividida en ocho partes y solamente están coloreadas seis".*

El resto del grupo estuvo de acuerdo en establecer la relación entre las tarjetas antes mencionadas, a la vez que reconocieron que fue una de las más fáciles de relacionar ya que no tuvieron necesidad de hacer particiones o buscar equivalencias, limitándose a contar el total de partes y las que se encontraban sombreadas para obtener con ellas la fracción indicada.

Se observa que los estudiantes identifican fácilmente la equivalencia al tratarse de fracciones comúnmente utilizadas como medios, cuartos y octavos, presentando mayor dificultad al trabajar con denominadores que pocas veces son utilizados como 15 y 24, generando una serie de confusiones, que la mayoría de los equipos logró superar gracias a la subdivisión de las figuras, lo que les permitía obtener fracciones equivalentes.

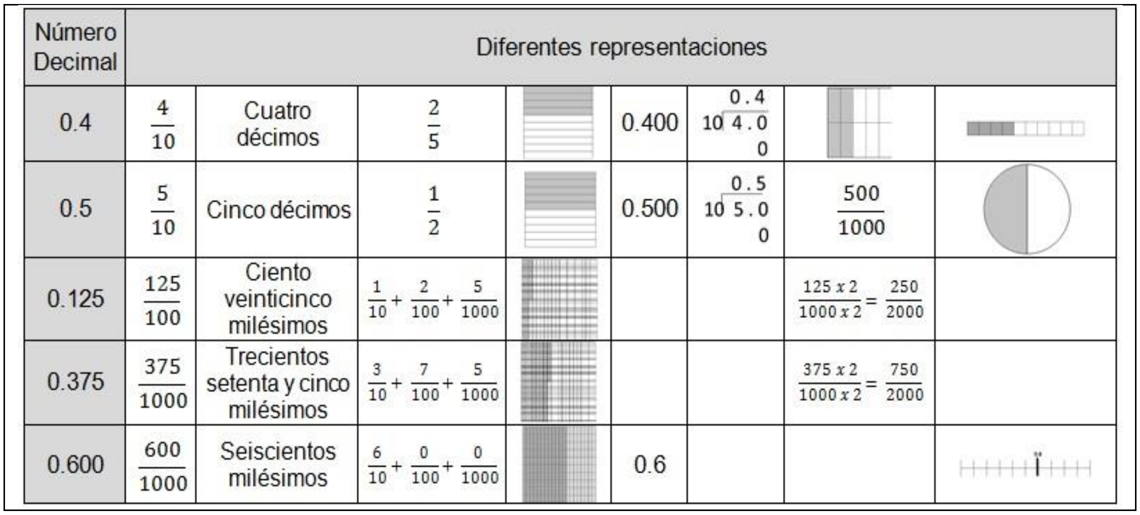
Descripción de la actividad 3: Con el objetivo de evidenciar las diferentes representaciones que logran hacer los estudiantes de un número decimal, se organizaron equipos de 4 integrantes y se solicitó buscar 3 representaciones distintas para los números indicados (figura 6.9).

Actividad 3 Observa la siguiente tabla y representa de tres formas distintas a los números de la primer columna.

0.4			
0.5			
0.125			
0.375			
0.600			

Figura 6.9. Actividad propuesta a los estudiantes.

Después de un tiempo aproximado de 20 minutos se pidió a los estudiantes mostrar los carteles con sus resultados para comparar las diferentes formas que encontraron para representar un mismo número, encontrando variedad de representaciones como se muestran en la figura 6.10.



Número Decimal	Diferentes representaciones							
0.4	$\frac{4}{10}$	Cuatro décimos	$\frac{2}{5}$		0.400	$\begin{array}{r}0.4\\10\overline{)4.0}\\0\end{array}$		
0.5	$\frac{5}{10}$	Cinco décimos	$\frac{1}{2}$		0.500	$\begin{array}{r}0.5\\10\overline{)5.0}\\0\end{array}$	$\frac{500}{1000}$	
0.125	$\frac{125}{100}$	Ciento veinticinco milésimos	$\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}$				$\frac{125\,x\,2}{1000\,x\,2}=\frac{250}{2000}$	
0.375	$\frac{375}{1000}$	Trecientos setenta y cinco milésimos	$\frac{3}{10}+\frac{7}{100}+\frac{5}{1000}$				$\frac{375\,x\,2}{1000\,x\,2}=\frac{750}{2000}$	
0.600	$\frac{600}{1000}$	Seiscientos milésimos	$\frac{6}{10}+\frac{0}{100}+\frac{0}{1000}$		0.6			

Figura 6.10. Distintas representaciones elaboradas por los estudiantes.

Las representaciones más utilizadas por los estudiantes fueron las fracciones decimales, la escritura con palabras del nombre del número y la representación en el cuadrado unitario probablemente porque fueron las que se utilizaron con mayor frecuencia durante las sesiones trabajadas hasta ese momento, apareciendo en menor medida, el resto de representaciones mostrado en la figura 6.10. Al preguntar cómo obtuvieron las diferentes representaciones de los números indicados, se encontraron variedad de argumentos como los que se muestran a continuación:

> *A-10 "En el primero vimos que era cuatro décimos y pusimos la fracción cuatro sobre diez que es cuatro décimos, después dibujamos un entero, lo dividimos en diez y coloreamos cuatro… pusimos cuatro sobre diez porque si lo dividimos sale ese número."*

Solamente 2 equipos no utilizaron $\frac{4}{10}$ como una de las representaciones para 0.4, por lo que se pidió mostrar las distintas formas utilizadas para representar a dicho número. El equipo 9 comentó:

E-9 "Nosotros pusimos cuarenta centésimos $\frac{40}{100}$ *porque representa lo mismo que cuatro décimos y también hicimos una recta, la dividimos en diez y marcamos el cuatro"*

Se hizo hincapié en la ubicación en la recta numérica que hizo uno de los equipos, preguntando si alguien más utilizó ese tipo de representación, a lo que el equipo 3 comentó que la había empleado en el número 0.600.

E-3 "Primero hicimos una recta de diez (centímetros) *y lo medimos en centímetros* (segmentos de un centímetro)*, intentamos dividirlo en milésimos y al final lo pusimos más o menos aquí* (ver figura 6.11a)"

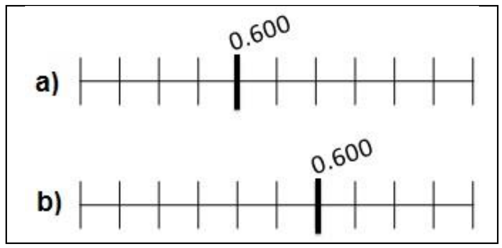


Figura 6.11. Ubicación de 0.600 en la recta numérica según el equipo tres.

Los demás equipos identificaron que la ubicación era incorrecta, haciendo algunas aproximaciones sobre la ubicación adecuada, al mencionar que el número se debía colocar poco después de la mitad de la misma. Algunos consideraban que:

A-11 "Debe tomar sólo 6 (partes de las diez totales) *porque seis décimos es igual a seiscientos milésimos"*

El resto de los alumnos consideraron adecuada la última aportación y comentaron que el número 0.600 se encontraba mal ubicado. El equipo 3 identificó la equivalencia referida y corrigió la representación como se muestra en la figura 6.11b.

Al solicitar otro tipo de representaciones distintas a las fracciones decimales, la escritura de los nombres, la representación en los cuadrados unitarios y el segmento de recta, el equipo 7 refirió haber encontrado una fracción equivalente a 0.125

E-7 "Buscamos la equivalencia, vimos que si poníamos lo doble (de cada número de la fracción $\frac{125}{1000}$*) era lo mismo, lo multiplicamos por dos"*

El equipo tomó como referencia la fracción decimal $\frac{125}{1000}$ que ya habían considerado, para que partiendo de esa fracción, al multiplicar por 2 tanto al numerador como al denominador, obtuvieran una fracción de igual valor, pero que fuera distinta gráficamente, a la fracción original, obteniendo así la fracción $\frac{250}{2000}$ como otra forma para representar a 0.125. A la mayoría de los estudiantes se les dificultaba reconocer la fracción resultante como correcta, en general se mostraban confundidos entre si era válida o no, hasta que en la discusión surgieron comentarios que indicaban que a pesar de que aparentemente fuera un número más grande que 0.125, se trataba de un número equivalente, por lo que sí podía ser válida la representación.

El equipo 8 indicó que también podían utilizarse fracciones como $\frac{1}{2}$ para representar números como 0.5 a lo que el equipo 9 indicó que esa misma fracción se podía representar en una figura y sombrear la mitad (Figura 6.12).

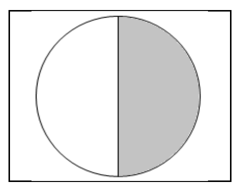


Figura 6.12. Representación para 0.5.

El equipo 5 indicó que otra forma de representar a los números es descomponerlos en fracciones, poniendo como ejemplo el número 0.375 al cual representaron como $\frac{3}{10}+\frac{7}{100}+\frac{5}{1000}$.

E-5 "Utilizamos la suma, pues es como si fueran tres décimos más siete centésimos más cinco milésimos…"

La mayoría de equipos indicó haber utilizado esa representación para algunos números, sobre todo los que contenían milésimos al permitir la descomposición del número en décimos, centésimos y milésimos. El equipo 2comentó que ellos habían utilizado otra representación similar (Figura 6.13 a).

$$\textbf{a)}\quad 0.600 = (0+10) + \frac{6}{10} + \frac{0}{100} + \frac{0}{1000}$$

$$\textbf{b)}\quad 0.600 = (0+1) + \frac{6}{10} + \frac{0}{100} + \frac{0}{1000}$$

$$\textbf{c)}\quad 0.600 = (0x1) + \frac{6}{10} + \frac{0}{100} + \frac{0}{1000}$$

Figura 6.13. Representación para 0.600

> *E-2 "nosotros hicimos la descomposición decimal… Es que aquí* (señala el cero de los enteros) *son décimos* (confunde a los décimos con las decenas), *entonces va 0 + 10 después sumamos seis décimos más cero centésimos, más cero milésimos…*

Inmediatamente un integrante del equipo nueve identifica que dicha representación es incorrecta y comenta:

> *E-9 "Es que ahí no debe ser 0 + 10, debe ser 0 + 1 porque está en las unidades y no en las decenas…* (Figura 6.13 b)*"*

Otro estudiante del equipo uno comenta que esa opción también es incorrecta.

> *E-1 "Es cero por uno, no cero más uno…"* (Figura 6.13 c)

Algunos alumnos comienzan a revisar los apuntes de sus cuadernos para recordar cual es la forma correcta para expresar el número indicado, después de lo cual un alumno comentó:

> *A-12 "El correcto es 0x1 porque si ponemos 0+1 sale uno y el resultado sería 1.600, si pongo 0+10 me sale 10.600 y con 0x1 sale 0.600"*

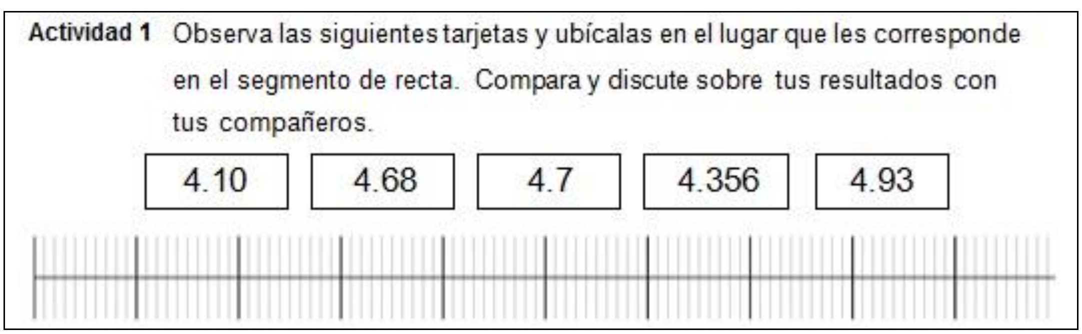
Todos los equipos estuvieron de acuerdo en que la forma correcta de expresar 0.600 era utilizando la multiplicación 0x1 para indicar que había cero enteros.

En conclusión, se observó que los estudiantes buscaron diversas formas de representar un decimal, para ello recurrieron a los conocimientos adquiridos en sesiones anteriores al utilizar las fracciones decimales y la escritura de los nombres de dichos números y hacer uso de materiales antes empleados como el cuadrado-unitario. Sin embargo, también hacen uso de otros conocimientos que retoman de sus clases de matemáticas, ejemplo de ello es que utilizan otras representaciones como la descomposición de los números según las potencias propias del Sistema de Numeración Decimal (Figura 6.13 c), la búsqueda de fracciones equivalentes con denominador distinto a 10, 100 y 1000 y la ubicación del número como un punto en la recta numérica, aspectos que hasta el momento no se habían trabajado, pero que sirvieron para identificar los conocimientos a los que recurren los estudiantes.

6.1.2 Sesión 6: Los decimales como puntos de la recta numérica.

Con la finalidad de trabajar otro tipo de representaciones para los decimales y permitir a los estudiantes un primer acercamiento a la noción de densidad, se plantearon cuatro actividades relacionadas con encontrar el punto que corresponde a un número sobre un segmento de recta. Se retomaron ideas relacionadas con el orden, la comparación y la equivalencia de decimales.

Descripción de la actividad 1: Se organizó a los estudiantes en 6 equipos, a cada uno de los cuales se les entregó una tira de cartulina dividida en centésimos y un paquete de tarjetas con 5 números decimales para que los ubicaran en el lugar correspondiente (Figura 6.14).


Actividad 1 Observa las siguientes tarjetas y ubícalas en el lugar que les corresponde en el segmento de recta. Compara y discute sobre tus resultados con tus compañeros.

4.10 | 4.68 | 4.7 | 4.356 | 4.93

Figura 6.14. Actividad y materiales presentados a los estudiantes.

El equipo 3 inició la explicación de la forma en que ordenaron sus tarjetas (Figura 6.15), indicando que:

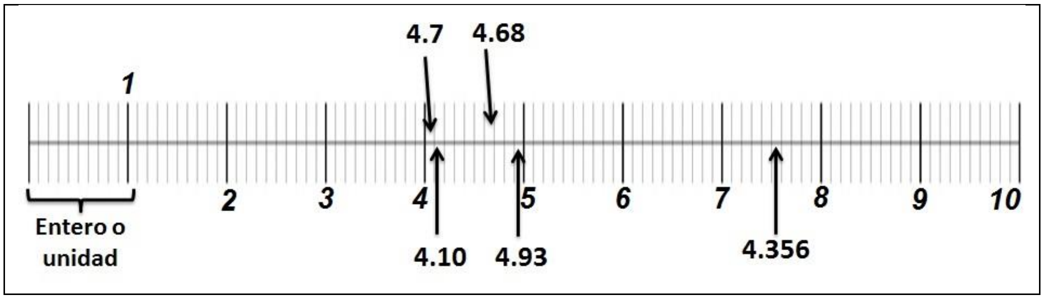


Figura 6.15. Resultados del equipo tres.

> *E-3 "Consideramos que el entero* (la unidad) *era éste* (ver figura 6.15) *y de ahí contamos cuatro enteros y diez décimos* (quiso decir centésimos) (señala el número indicado)*, después el cuatro enteros siete décimos, nos aproximamos casi a la primera línea* [después del 4][19] *y lo pusimos ahí"*

Al enfatizar que según el orden establecido por el equipo 3, quedaría colocado primero el número 4.7 y después el 4.10, varios estudiantes identificaron que ese orden era incorrecto, explicando por qué consideraban eso.

> *A-1 "Está mal porque así como lo colocaron dice siete centésimos y no siete décimos, el siete décimos va hasta acá* (Señala la línea donde considera que va el 4.7, próximo al 5)"

El equipo identifica inmediatamente el error y reconoce que el lugar que ellos marcaron corresponde al número 4.07, que no es el indicado en la tarjeta. Mencionaron que 4.7 es mayor que 4.10 porque cuatro enteros diez centésimos es igual a cuatro enteros un décimo y un décimo es menor que siete décimos, por lo que no se puede colocar 4.7 antes de 4.10. Bajo estos razonamientos es que realizan las correcciones necesarias.

Acto seguido, el equipo 4 comenzó a explicar cómo encontró el punto sobre la recta que correspondía al número 4.356 (Figura 6.16)

[19] Es importante destacar que la ubicación de los números corresponde a puntos de la recta, no a líneas que la cruzan, sin embargo, por la forma en que los segmentos se encontraban divididos, los estudiantes hacían uso de la idea de línea al ubicar los decimales.

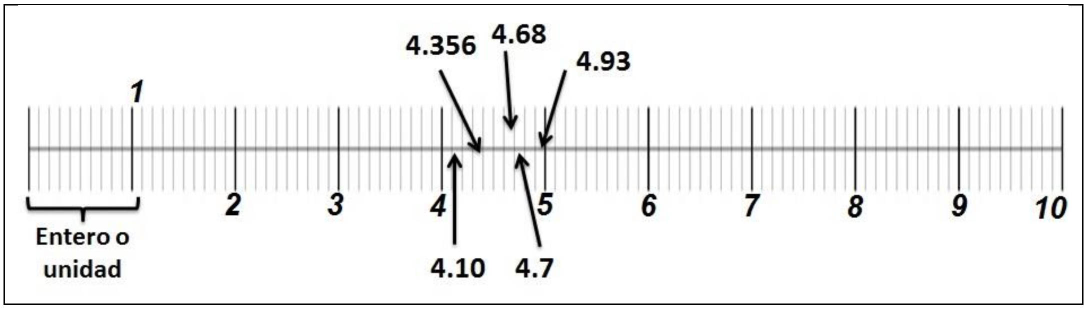


Figura 6.16. Resultados del equipo cuatro.

> *E-4 "Nosotros contamos de aquí a acá que era un entero* (señala el segmento marcado como unidad en la figura 6.16) *y como aquí nos marca cuatro enteros, contamos uno, dos, tres, cuatro, y faltan los 356 milésimos;* (entonces) *contamos las rayitas que equivalen a cien milésimos y contamos 100, 200, 300 y aquí nos marca 56 milésimos y lo pusimos más o menos a la mitad de la otra* (refiriendo que aproximaron el lugar que ocuparía 4.356 entre 4.3 y 4.4)"

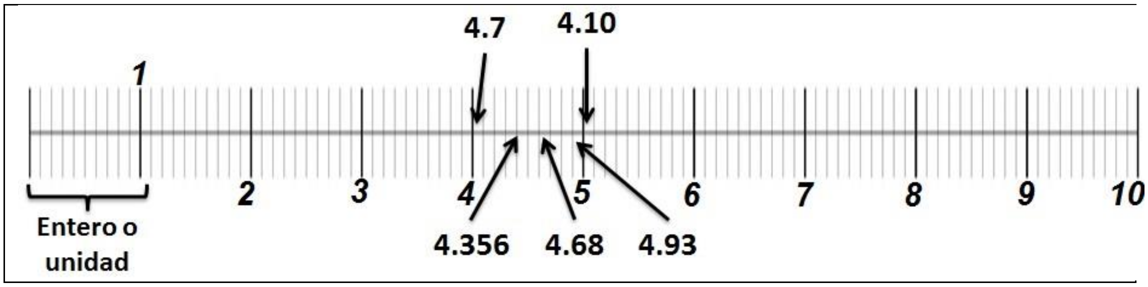
Se observa que los estudiantes de este equipo no tuvieron dificultades al ubicar los decimales en la recta. Ellos ubican los números "por etapas", es decir, hacen uso de la subdivisión del entero primero en décimos ($\frac{1}{10}$), el cual después dividen en diez partes, obteniendo así los centésimos. Este nuevo segmento ($\frac{1}{100}$) lo dividen en diez partes para obtener milésimos. Y así continúan según se requiera para establecer las equivalencias solicitadas. Por ejemplo, al observar que la parte que consideraron como entero ya estaba dividida en décimos, reconocieron que cada uno de esos segmentos correspondía a cien milésimos, lo que les ayudó a encontrar la ubicación de 4.356.

Se analizó también la ubicación que el equipo 3 dio al mismo número (ver antes la figura 6.15), el cual colocó al final del segmento de recta dado, entre los números 7 y 8. Para hacerlo, se preguntó a los demás equipos cuál de las dos ubicaciones consideraban correcta, si la del equipo 3 o la del equipo 4. El equipo 3 reconoció que la ubicación que dieron al inicio era incorrecta.

> *E-3 "Pensamos que iba ahí porque eran milésimos y no podía ir acá (en el segmento de la recta correspondiente a los números cuatro y*

cinco) pero ya vimos que está mal [colocado], tiene que ir por acá (señalan la ubicación aproximada)"

A continuación se discutió sobre la ubicación que el equipo 2 dio a los números (Figura 6.17)



2. **Figura 6.17.** Resultados del equipo dos.

Algunos estudiantes reconocieron que 4.7 estaba mal ubicado porque se encontraba muy cerca del punto que representa al número 4 y debía estar ubicado más cerca del número 5. Con este comentario el equipo reconoció que se habían confundido en el número 4.7 ya que habían considerado 0.7 como si fueran centésimos y no décimos. Al preguntarles con base en qué ubicaron el número 4.10, el equipo explicó que:

E-2 "Dividimos los cuatro enteros y contamos las diez rayitas que quedaban entre 4 y 5 y empezamos a contar 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9 y llegamos al 4.10"

Los estudiantes de otros equipos mencionaron que no era válido colocar el 4.10 en el punto señalado por el equipo dos, ya que dicho punto corresponde al número 5.

A-2 "Ahí va cinco enteros porque si quitamos el cero [al número 4.10] podemos cambiar el diez por un décimo… debe ir en la primer línea [después del número 4]"

Con el comentario anterior el alumno A-2 intentó explicar al equipo 2 que establecer la equivalencia entre 4.10 y 4.1, les hubiera permitido encontrar el punto correcto sobre la recta para 4 enteros 10 centésimos, lo cual fue aceptado por el equipo y les permitió hacer la modificación correspondiente.

Hasta el momento, todos los equipos habían considerado que la recta iniciaba en 0 y terminaba en 10 (figura 6.18 a) y habían colocado las tarjetas en el segmento entre 4 y 5, por lo que se les planteó el ejemplo de un estudiante que había considerado que la recta representaba solamente el segmento delimitado por 4 y 5 (Figura 6.18b).

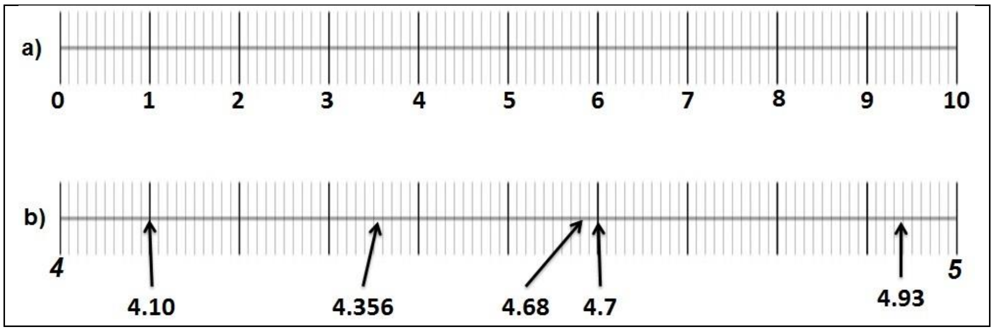


Figura 6.18. Resultados del estudiante que dio el contraargumento.

Al observar la ubicación que el alumno del ejemplo dio a cada número, los estudiantes comentaron que era incorrecto, argumentando que:

> *A-3 "No está bien porque en la de cuatro enteros diez centésimos agarra menos, porque ahí está tomando solo un entero y no cuatro"*
>
> *A-4 "ese niño no toma en cuenta los enteros porque donde está 4.10 apenas es un entero…"*
>
> *A-5 "No toma en cuenta los enteros porque ahí sólo contó del uno al diez y ahí puso la primer tarjeta"*

Como se ve en estos comentarios, para la mayoría de los estudiantes, los números estaban mal colocados ya que consideraban necesario que la recta iniciara en el número 0 para permitir la adecuada ubicación de los números, de lo contrario, les quedaba la apreciación de que no se estaban tomando en cuenta las unidades o enteros por lo que la ubicación resultante sería incorrecta.

Después de los comentarios emitidos, se preguntó: **¿Qué segmento representó la unidad para el estudiante que dio la respuesta del inciso b de la figura 4.18?** A lo que los estudiantes respondieron que el segmento de recta inicial representaba una unidad. Un estudiante del grupo propuso organizar las tarjetas considerando ese segmento de recta como unidad y (erróneamente) colocar al inicio del segmento el número cero, y al final de éste, el número 1 (Figura 6.19a).

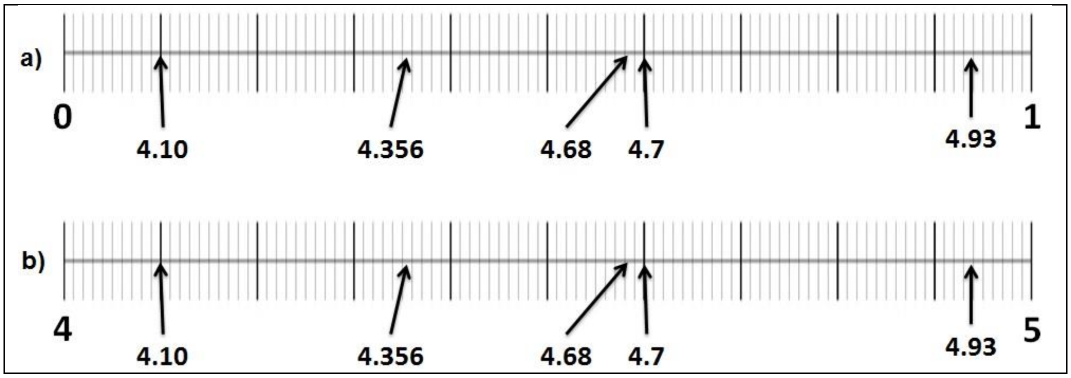


Figura 6.19. Identificación de la unidad en la recta numérica.

Al observar que en el segmento de recta entre 0 y 1 no se encontraban los números indicados, la mayoría de los estudiantes sugirieron cambiar el 0 por el número 4 y el 1 por el número 5 (Figura 6.19b), indicando que de esta forma sí estarían bien ubicados los números.

> *A-6 "Es sólo como tomar más a fondo la recta numérica entre 4 y 5, se puede decir que esa recta es sólo el pedacito entre 4 y 5".*

El comentario anterior hace referencia a que para ubicar los números, también se puede considerar solamente el segmento de recta que se necesite según los números indicados, sin tener que partir del cero. La mayoría de alumnos están de acuerdo en que también es correcta esa forma de ubicarlos, pero se observa que prevalece la idea de que siempre es necesario partir del 0 e ir ubicando cada uno de los naturales hasta llegar al número indicado, en este caso al segmento entre 4 y 5.

Descripción de la actividad 2: Se continuó con la organización de los estudiantes en 6 equipos de trabajo y a cada equipo se le entregó un paquete con 5 tarjetas adicionales a las utilizadas en la actividad 1 (Figura 6.20). El objetivo era que las ubicaran en la recta, de tal forma que se conservara la ubicación de las tarjetas anteriores, es decir, que las 10 tarjetas quedaran ubicadas correctamente en la recta. Se permitió realizar las modificaciones que consideraran pertinentes.

Actividad 2 Agrega las siguientes tarjetas a la recta. Puedes modificar la ubicación de las que ya habías colocado.

5.001	5.02	5.4	5.64	5.931

Figura 6.20. Segunda actividad presentada a los alumnos.

El equipo 3 inició con la explicación y presentación de la colocación de los números en "su recta"; comentaron que decidieron conservar la ubicación de los números utilizados en la actividad 1, y solamente agregar las nuevas tarjetas (Figura 6.21)

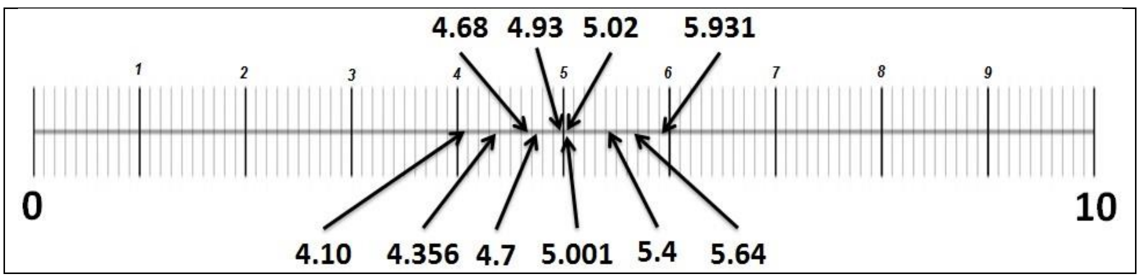


Figura 6.21. Ubicación de los diez números en la recta.

> *E-3 "Lo que nosotros hicimos fue acomodar los números contando las líneas que eran los enteros, vimos que ya estaban bien* [las tarjetas anteriores] *y pusimos las demás, contamos desde el cero".*

En la actividad número 1, este equipo había cometido errores en la ubicación de los decimales en la recta, sin embargo se observa que el orden establecido en esta segunda actividad es correcto. Es decir, el equipo consideró los comentarios generados en la discusión de la actividad anterior y con ello logró superar las dificultades iniciales. El equipo complementó la ubicación de los números en las tarjetas utilizadas en la actividad anterior con las nuevas tarjetas, manteniéndola como un segmento del 0 al 10 y colocando los nuevos números en el segmento delimitado por 5 y 6.

El equipo 1 tenía una ubicación distinta de los decimales (Figura 6.22) por lo que se solicitó a los integrantes de ese equipo, explicar dicha ubicación.

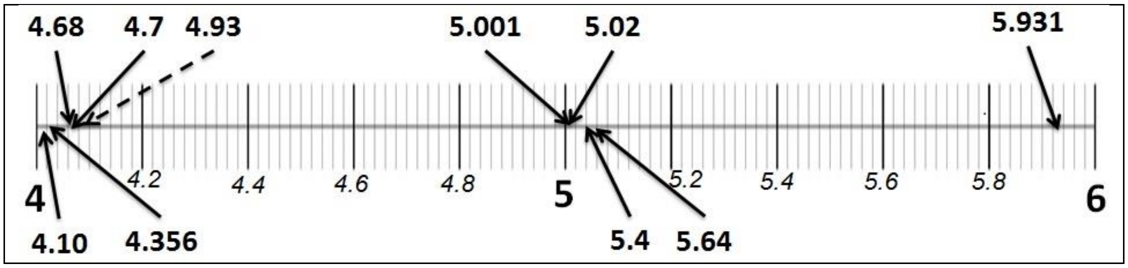


Figura 6.22. Ubicación de los diez números en la recta, según el equipo 1.

> *E-1 "Primero pusimos el cuatro, en medio el cinco y al final el seis, y aquí sólo nos daba en cincuenta partes y tenían que ser cien partes* (entre 4 y 5 y cien partes más entre 5 y 6)*, entonces cada mitad representaba un décimo por eso aquí nos quedó el cuatro enteros diez centésimos, acá el 4.356 después 4.68 y 4.7 y acá pues ya lo borramos* (señalando los números mencionados y finalmente el 4.93, mismo que no tenía la flecha hacia el punto que ocupa en la recta y que colocaron en ese momento)*".*

El equipo observó que el segmento de recta entre los números 4 y 5 quedaba dividido sólo en 50 partes y debía dividirse en 100 para poder considerarlos centésimos. De este modo, de acuerdo a sus razonamientos, cada 2 décimos se encontraba un punto marcado mediante una subdivisión de la recta. Los razonamientos generados hasta ese momento eran correctos, pero al momento de colocar las tarjetas se generó la confusión en el equipo, ya que el segmento que correspondería a un décimo, lo tomaron como si fuera la unidad, ubicando en él todas las tarjetas. Un integrante del equipo 6 identificó la confusión al comentar:

> *E-6 "Es que todos los que pusieron ahí están mal porque ahí según la recta entera es de 4 a 5 y ahí están tomando sólo un décimo (como si fuera un entero)"*

Los integrantes del equipo uno reconocieron inmediatamente que habían confundido un décimo con el entero:

> *E-1 “Ah!!! Entonces sí, porque si aquí sólo son diez* (o un décimo)*… y los pusimos mal, ¿Lo puedo rectificar?”*

El equipo 1 mostró especial interés en corregir la ubicación de las tarjetas, ya que lograron aclarar las confusiones generadas, gracias a las observaciones realizadas en la discusión grupal. A continuación, el equipo 6 explicó la forma en que organizaron las 10 tarjetas (Figura 6.23).

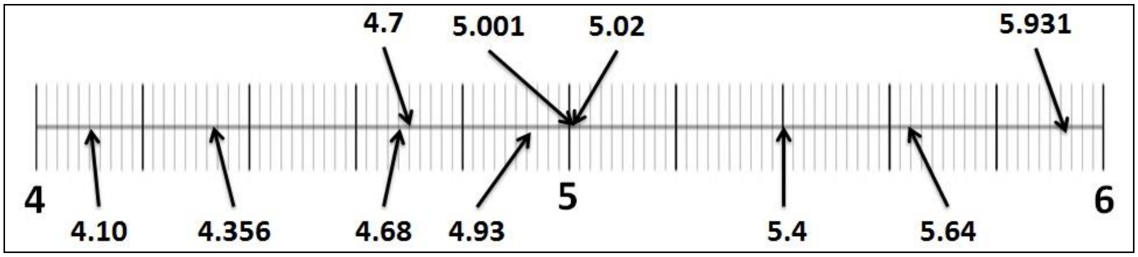


Figura 6.23. Ubicación de los diez números en la recta, según el equipo seis.

> *E-6 “Nosotros dividimos toda la recta en dos para que esté del cuatro al cinco […] y el otro fuera del cinco al seis, y como de cuatro al cinco eran cinco partes* (segmentos más marcados)*, tomamos en cuenta que cada uno valía dos décimos […], así (en medio del primero de los cinco segmentos entre 4 y 5) pusimos al 4.10, para encontrar el lugar de 4.356, como éste (primer segmento) vale dos [décimos] y hasta éste (segundo segmento) son cuatro [décimos], la mitad de éstos es equivalente a 300 milésimos y del que sigue agarramos la mitad y ya”.*

El equipo refiere que consideraron que cada uno de los 5 segmentos entre 4 y 5 es equivalente a 2 décimos, y a partir de este razonamiento ubican el punto sobre la recta correspondiente a cada decimal.

El equipo 5 obtuvo la misma ubicación que el equipo 6 y explicaron cómo fue que ubicaron las tarjetas entre los números 5 y 6.

> *E-5 “Entre el cinco y el seis, primero lo dividimos en décimos; marcamos las líneas que faltaban. [Como el segmento quedaba dividido en cinco] la mitad es uno, dos, tres y así hasta el diez que es el seis. Y como aquí nos pide cinco enteros cuatro décimos sólo contamos cuatro líneas marcadas y la pusimos en esta parte, esta de 5.001 la pusimos después del cinco, la de 5.02 la pusimos en la primer línea pequeña…”*

Este equipo consideró necesario colocar nuevas líneas en el segmento entre 5 y 6, de tal forma que el segmento de recta original, quedara dividido en 10 partes iguales que corresponden a los décimos; con ello les fue más fácil ubicar correctamente las tarjetas.

Finalmente, los alumnos concluyeron que la mayor dificultad que tuvieron fue determinar la manera de dividir la recta numérica para que les permitiera ubicar el lugar que ocupa cada número. Algunos admitieron que no siempre es necesario considerar al 0 como el inicio de un segmento de recta, sino que se puede iniciar desde el segmento que sea necesario según los números que se quiera ubicar. Sin embargo, al final de la actividad prevalecía en la mayoría de los estudiantes la idea de que siempre se debe partir del cero cuando se desee ubicar algún número sin importar que tan cerca o alejado esté del cero.

Descripción de la actividad 3: Con la finalidad de verificar si persistían en los estudiantes las dificultades para determinar el segmento de recta útil para ubicar decimales en la recta, se organizó al grupo en equipos de 4 integrantes y se les entregó un segmento de recta dividido en centésimos (con el que se trabajó la actividad 1 y la actividad 2, ver figura 6.14) y un paquete de 10 tarjetas. (Figura 6.24)

Actividad 3 Determina el rango de la recta que necesitas para ubicar las siguientes cantidades y colócalas en el lugar correspondiente.

0.09	0.4	0.250	0.680	0.75
1.08	1.1	1.30	1.550	1.90

Figura 6.24. Tercera actividad planteada a los estudiantes.

Antes de iniciar el trabajo en equipos, se pidió a los estudiantes que observaran los números en las tarjetas y determinaran qué segmento de la recta necesitaban para ubicarlas. Los estudiantes comenzaron a dar sus opiniones:

A-7 "Entre un entero y dos"

A-8 "Del dos al tres"

A-9 "Entre cero y dos"

De forma grupal se decidió que para colocar todas las tarjetas era necesario que el segmento de recta estuviera acotado por el 0 y el 2, ya que había cantidades menores y mayores que 1, pero todas eran menores que 2. Por lo anterior, se acordó iniciar ese segmento de recta con el número 0, colocar el uno en la mitad y al extremo del mismo, colocar el número 2. De este modo, la longitud de la recta sería de 2 unidades. Se dio oportunidad a que los estudiantes tomaran en cuenta las líneas ya marcadas en la recta, o de ser necesario, hicieran nuevas divisiones según consideraran conveniente.

Después se entregó a cada equipo una tarjeta para que pasaran a acomodarla en el segmento de recta dibujado en el pizarrón y con ello verificar de forma grupal la ubicación dada a cada tarjeta, permitiendo que los estudiantes compararan sus respuestas y de ser necesario las modificaran.

Un integrante del equipo 4 explicó cómo fue que determinó la ubicación de 0.250; argumentó que:

E-4 "Para encontrar 0.250 conté uno, dos [décimos] y la mitad del otro"

Es decir, este alumno observó que del 0 al 1 se encontraban 5 divisiones, cada una de los cuales correspondía a 2 décimos (véase figura 6.25a), por lo que contó del 0 a la mitad del primer segmento como 1, y de ahí al extremo de ese primer segmento como 2 décimos. Como el número indicado era doscientos cincuenta milésimos, decidió tomar la mitad del segundo segmento y colocar ahí el número 0.250, probablemente intentando completar los cincuenta milésimos faltantes, sin embargo, no consideró que de acuerdo a sus razonamientos anteriores, ese punto de la recta corresponde al número 0.300.

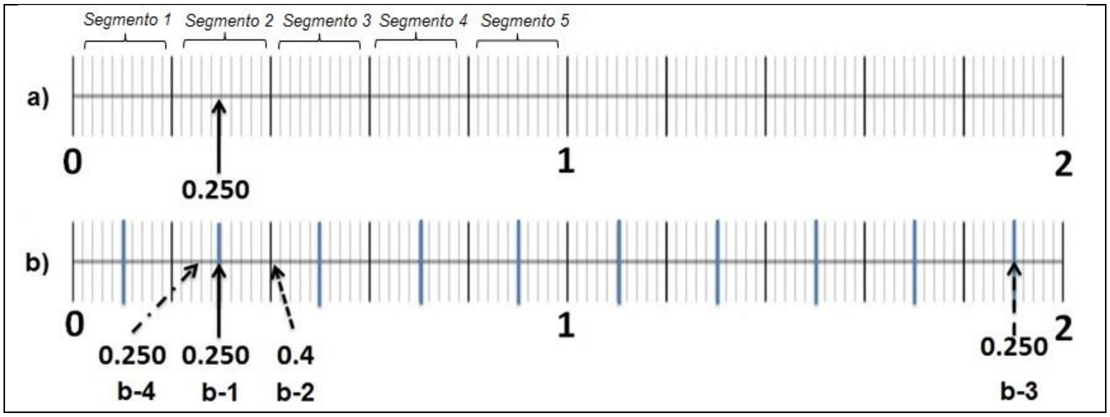


Figura 6.25. Ubicación en la recta numérica.

Los demás equipos consideraron que la ubicación de 0.250 era incorrecta, por lo que sugirieron:

> *A-10 “Primero deberíamos dividir en diez para saber los décimos para ubicar más fácilmente los números”*

> *A-11 “Para encontrar los décimos y así sería más fácil dividir también en centésimos y en milésimos”*

Un integrante del equipo 5 divide cada unidad (del 0 al 1 y del 1 al 2) en diez partes iguales (Figura 6.25b). Ya con esa división, un alumno del equipo 6 pasó a colocar la tarjeta correspondiente a 0.4 en la recta, manteniendo la ubicación dada anteriormente a 0.250 (Figura 6.25 b-1 y b-2). La mayoría de los estudiantes reconoce que el número 0.4 está en el lugar correcto y que hay que modificar el lugar del 0.250. Una alumna integrante del equipo 1 pasa a hacer la corrección, colocando el número casi al extremo de la recta (Figura 6.25 b-3) justificando esta ubicación con los siguientes argumentos:

> *E-1 “Yo conté diez, veinte, treinta, cuarenta… cien [hasta 1]; otra vez, diez, veinte, treinta, cuarenta… cien (hasta 2; al contar señala cada una de las líneas que dividen a las unidades en diez partes iguales), serían 200 y como aquí me dice 250, de este último lo dividí y agarré la mitad…”*

Esta alumna comenzó a contar cada décimo como si fueran 10 centésimos, razonamiento que es adecuado, ya que concluye que la recta completa equivale a 200 centésimos. Sin embargo, no logra colocar el número en el lugar correcto ya que confunde los centésimos que ella contó, con los milésimos que indicaba la tarjeta. Es así como, al observar que el segmento inicial de la recta contenía 200 centésimos pero que ella consideraba como milésimos, decide tomar los 50 milésimos de los que ya había contado, regresando sobre la recta. Es evidente que para la alumna, el que un número contenga al número 5 o 50 después del punto, éste se referirá a tomar la mitad del segmento u objeto con el que se esté trabajando. En este caso, para representar al 0.250, toma la mitad del último segmento de la recta.

La mayoría de los estudiantes hizo evidente su confusión respecto de la cuenta que realizó su compañera, ya que no sabía si estaba contando centésimos o milésimos, por lo que un integrante del equipo 5 pasa a hacer la corrección necesaria (Figura 6.25 b-4)

> *E-5 "Yo conté las líneas y hasta aquí* (segmento 1) *sería un décimo, dos décimos* (segmento 2) *y aquí ya son tres décimos (segmento 3) así que no iría aquí, entonces yo partí a la mitad* (el tercer segmento)*…y ahí ubiqué al 0.250"*

La totalidad del grupo estuvo de acuerdo en que ese punto sobre la recta era el que corresponde a 0.250 porque cada décimo equivale a cien centésimos y primero se tomaron doscientos milésimos y al tomar la mitad del otro segmento, se completaban los 50 milésimos que faltaban. Siguiendo esta estrategia, el equipo dos pasó a colocar el número 0.75 y los otros números faltantes (Figura 6.26).

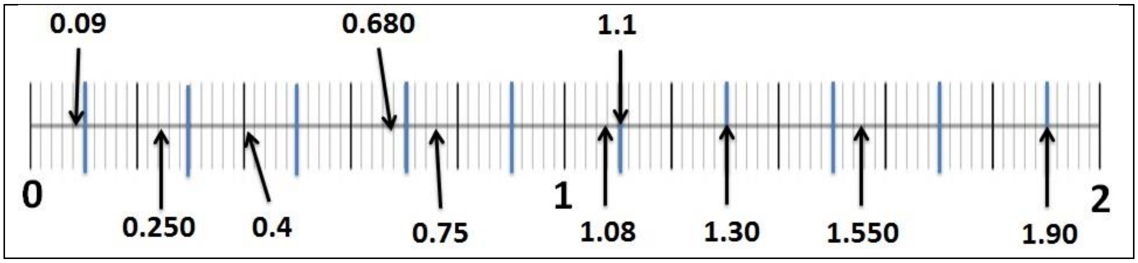


Figura 6.26. Ubicación en la recta numérica.

Durante la discusión sobre la ubicación de los decimales en la recta, se puso en evidencia que la principal dificultad a la que se enfrentan los estudiantes es la división de la unidad de referencia.

Al terminar de ubicar todas las tarjetas sobre la recta, como ya se dijo antes, los estudiantes coincidieron en que al ubicar determinados números, no siempre es necesario considerar el segmento de recta desde el origen o del 0, sino que se puede tomar solamente el segmento de la recta en el que se encuentren los números indicados. Sin embargo, esto representó mayores dificultades en la definición de la unidad y la subdivisión del segmento de recta para ubicar los décimos, centésimos y milésimos. En este caso, identifiqué que la subdivisión que ya tenía la recta numérica fue la que generó las confusiones para realizar la ubicación.

Descripción de la actividad 4: Con la intención de verificar si la subdivisión de la recta numérica que se había utilizado era la que generaba confusiones, se organizó a los estudiantes en parejas y se les entregó un segmento de recta donde solamente se encontraban marcados el 0,1 y 2, junto con un paquete de tarjetas a fin de que ubicaran en la recta los números anotados en ellas (Figura 6.27). Se enfatizó en que los estudiantes definieran la unidad y a partir de esta definición ubicaran los números.

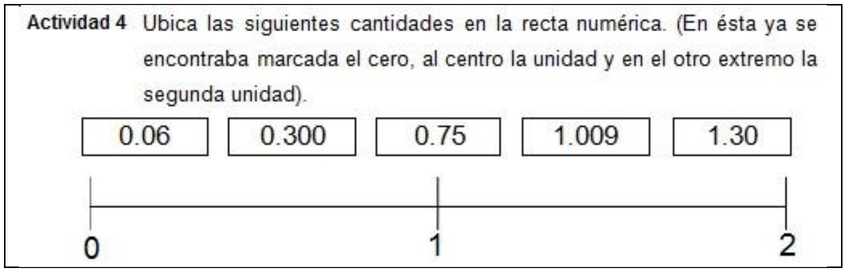


Figura 6.27. Cuarta actividad presentada a los estudiantes.

Una vez que los estudiantes hubieron ubicado los decimales propuestos en la recta, se inició la presentación de resultados, y los alumnos explicaron cómo fue que encontraron el lugar para cada tarjeta. Una pareja inició la explicación con el número 0.75 (Figura 6.28a).

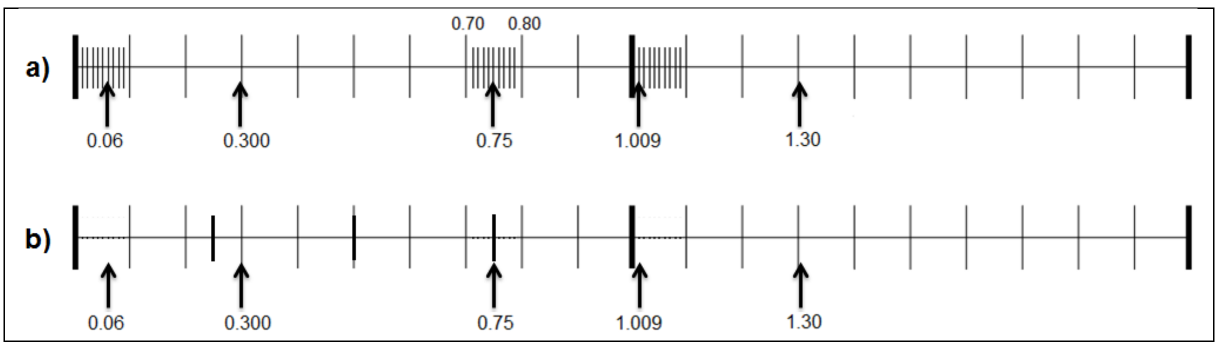


Figura 6.28. Ubicación de los decimales presentada por una pareja de estudiantes.

> *"Primero buscamos el de 0.75 aquí y ubicamos el siete décimos y el ocho décimos… y le agregamos un cero al siete y al ocho y nos dio 0.70 y 0.80, de ahí lo partimos en diez partes y tomamos el 0.75".*

Estos alumnos dividieron cada unidad en 10 partes iguales, de tal forma que les quedara dividido en décimos. Una vez hecha esta división, establecieron la equivalencia entre 7 y 8 décimos agregando un 0 a cada número para obtener 70 y 80 centésimos y localizar con mayor facilidad sobre la recta el punto correspondiente a 0.75 centésimos.

Otra pareja de estudiantes indicó que ellos utilizaron otra forma para ubicar al número 0.75, distinta a la división en 10 (Figura 6.28b), explicando que:

> *"… Lo dividimos en 4 partes iguales porque cada parte es como si valiera veinticinco centésimos y 25+25 son 50 y 50+25 son 75* (centésimos)".

Los alumnos que hicieron el comentario anterior consideraron que 0.75 era equivalente a $\frac{3}{4}$ del segmento marcado entre 0 y 1, por lo que lo dividieron en 4 segmentos de igual tamaño y tomaron sólo 3 para ubicar el número 0.75. La mayoría de los estudiantes del grupo reconocieron la equivalencia entre setenta y cinco centésimos y los $\frac{3}{4}$ del entero que habían marcado los alumnos A-3 y A-4 y que la ubicación era correcta y coincidía con el lugar asignado por otros equipos de trabajo. Esos mismos alumnos indicaron que para definir el lugar sobre la recta de trescientos milésimos sí tuvieron que dividir el entero en 10 partes iguales y colocar el número 0.300 en la tercera de las diez subdivisiones después del 0, ya que 3 décimos es igual a trescientos milésimos. Después de esto, otro equipo explicó cómo fue que ubicó el número 1.30 (Figura 6.28a)

> *"Lo primero que hicimos fue ubicar el entero, de ahí lo dividimos en 10 partes y como un entero treinta centésimos es igual a un entero tres décimos, por eso nada más contamos una, dos, tres líneas (después del número 1) y lo pusimos ahí".*

Los demás equipos aceptaron que las equivalencias establecidas entre centésimos y décimos eran adecuadas y que la ubicación también era correcta. Las alumnas A-5 y A-6 indicaron el procedimiento seguido para encontrar el punto que ocupa 1.009:

> *"Nosotras agarramos primero un entero y luego agarramos un décimo más y lo dividimos en diez, de ahí agarramos nueve para que nos saliera un entero nueve milésimos".*

Después de este comentario, los demás estudiantes identificaron que esa ubicación no era la correcta ya que ese lugar correspondía a un entero nueve centésimos:

"Para que sea un entero nueve milésimos, tenían que agarrar sólo una línea (o un centésimo), dividirlo en diez y tomar solo nueve, así sí serían los nueve milésimos".

La mayoría de alumnos indicó que las alumnas A-5 y A-6 habían marcado 1.09 y no 1.009, sin embargo, hubo otras 3 parejas de estudiantes que obtuvieron ese resultado, mismo que fue modificado una vez que escucharon los argumentos dados en la discusión grupal. El último número (0.06) lo presentaron los estudiantes A-7 y A-8, quienes indicaron lo que realizaron para encontrar el punto donde se encuentra.

"Es que nosotros dividimos todo esto en diez (se refiere al segmento entre el 0 y 1), que son cien centésimos, y sólo tomamos seis partes de cien".

Se observó que la principal estrategia utilizada por los estudiantes para determinar el punto que ocupa un número en la recta, es la partición de la unidad en décimos, lo cual les facilita la ubicación de números de otro orden como lo son los centésimos y milésimos. El que en las actividades anteriores, los segmentos de recta con los que se trabajó, se encontraran previamente divididos, fue motivo de confusiones en los estudiantes, mismas que ya no se presentaron en esta actividad, y los alumnos tuvieron la oportunidad de hacer las subdivisiones que consideraran pertinentes.

6.1.3 Principales momentos en la comprensión de las distintas representaciones de los decimales.

Recordemos que en este rubro se trabajaron 2 sesiones cuyo objetivo era que los estudiantes reconocieran representaciones para un decimal distintas de las expresiones con punto y las expresiones de la forma $\frac{a}{b}$ con b potencia de 10. A lo largo de estas sesiones, se priorizó: a) el uso de fracciones con denominadores distintos de 10, 100 o 100, b) la representación de áreas en figuras distintas al cuadro-unidad y c) la representación de los decimales como puntos en la recta. Esta última actividad sirvió también como antecedente a la introducción de la noción de densidad que se aborda en sesiones posteriores.

Entre los avances que se observaron en los estudiantes respecto al reconocimiento de distintas formas de representar un decimal, se encuentran los que a continuación se enlistan:

- ✓ La mayoría de los estudiantes logra identificar que la representación en una figura de un área determinada, puede ser equivalente a un número decimal, por lo que la principal estrategia que utiliza para indicar el número que corresponde a un área dada, es la obtención de una fracción que represente la cantidad de partes sombreadas y el total de partes en que se encuentra dividida la figura inicial, para posteriormente efectuar una división del numerador entre el denominador, obteniendo así un número decimal que es el que reconocerán como equivalente a la superficie indicada.

- ✓ En el caso de las figuras que se encuentran divididas en medios o cuartos, los estudiantes llegan a establecer generalizaciones que les permiten dar respuestas certeras sin necesidad de hacer operaciones, por ejemplo, identifican que cuando una figura se encuentra dividida en dos partes iguales cada una de ellas va a corresponder a $\frac{1}{2}$, lo cual es equivalente a 0.5, 0.50 o 0.500. Lo mismo ocurre cuando la figura se encuentra dividida en cuartos, donde establecer que cada parte corresponderá a $\frac{1}{4}$, que es equivalente a 0.25. Estas generalizaciones las dan por hecho y les facilitan la obtención de resultados.

- ✓ Respecto al uso de fracciones como una de las representaciones para un número decimal, la mayoría de los estudiantes no tiene dificultades para relacionarlos o establecer equivalencias entre ellos, y recurren a la división para obtener el decimal correspondiente. Por ejemplo, para encontrar el decimal que pueda representar a la fracción $\frac{2}{8}$, efectúan la división de 2 entre 8 igual a 0.25. Siguiendo el ejemplo, si se solicita buscar una fracción para el decimal 0.25, en ocasiones obtienen alguna de las fracciones más utilizadas como $\frac{1}{4}$, y a partir de ella encuentran alguna fracción equivalente como $\frac{3}{12}$, lo que muestra que hacen uso de una serie de conocimientos previamente construidos que les permiten proponer diversas fracciones que representen un mismo decimal.

Para algunos estudiantes la dificultad se encuentra en la operatividad con el algoritmo de la división, ya que por ejemplo, en lugar de dividir 3 entre 12 igual a 0.25 ordenan las cantidades de forma inadecuada: 12 entre 3 igual a 4, lo que genera respuestas incorrectas y los lleva a confusiones sobre cómo encontrar la expresión decimal que corresponde a una determinada fracción.

- ✓ La representación de los decimales como puntos en la recta es otro de los aspectos abordados en las sesiones. En general los estudiantes logran reconocer el punto de la recta que corresponde a un decimal, haciendo particiones de la unidad en décimos cuando se encuentra claramente determinada la unidad. A partir de los décimos establecen la equivalencia con los centésimos y milésimos, y sólo en caso de tener duda sobre la ubicación es que hacen la subdivisión de los décimos en centésimos y de los centésimos en milésimos.

  Pocos estudiantes realizan subdivisiones que no sean en décimos, por ejemplo, para ubicar números como 0.25 o 0.5, los cuales se pueden encontrar dividiendo la unidad es medios o cuartos, la mayoría de los estudiantes considera necesario dividir la unidad en décimos y así encontrar el punto en la recta que ocupan los números indicados.

  Cuando se trabaja con segmentos de recta donde la unidad no está dividida en décimos, sino en medios, tercios, quintos etc., se presentan dificultades en la ubicación de los decimales, ya que dichas divisiones son causa de confusión en la mayoría de los estudiantes, quienes no logran determinar la unidad y a partir de ésta hacer nuevas subdivisiones, dando como resultado ubicaciones incorrectas. Observamos que algunas de las subdivisiones propuestas en las actividades no fueron del todo adecuadas o sencillas de comprender para los estudiantes, ya que impidieron que los alumnos manipularan la recta según lo necesitaran y como consecuencia se obtuvieron ubicaciones erróneas.

Lo anterior, consideramos que puede derivar de la forma en que se presentan los decimales y sus diversas representaciones en la escuela. Es decir, se tiende a favorecer en los alumnos la idea de que al hablar de números decimales, las subdivisiones que se hacen de la unidad deben ser en diez, cien o mil partes.

Por otra parte, predomina en los estudiantes la idea de que para ubicar cualquier decimal en la recta siempre es necesario marcar como punto de referencia, el origen o 0, y a partir de él, establecer las unidades requeridas y los decimales indicados, sin importar la distancia que haya entre el cero y el número que se vaya a ubicar. Es decir, consideran que para ubicar un número como 7.35, es necesario marcar en la recta el cero, uno, dos, tres… siete, ocho… para posteriormente hacer las subdivisiones necesarias del segmento delimitado por siete y ocho, y poder ubicar el 7.35. Son pocos estudiantes los que logran identificar que para ubicar el número anteriormente mencionado, puede tomarse solamente el segmento entre 7 y 8, sin necesidad de considerar desde el 0.

Algunos pocos alumnos aún presentan dificultades para establecer equivalencias entre décimos, centésimos y milésimos, lo cual repercute en la ubicación incorrecta de los números en la recta, al llegar a considerar por ejemplo, los milésimos como si fueran centésimos.

- ✓ Algunos estudiantes hacen uso de otros conocimientos para proponer nuevas formas de representar un decimal, por ejemplo, recurren a la descomposición de los decimales en suma de fracciones decimales, por ejemplo $0.450 = \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{0}{1000}$, o combinando esta idea con la noción de la potencia al expresar que $0.450 = 0x1 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{0}{1000}$. El uso de esos conocimientos que no se habían considerado en las sesiones diseñadas, pero que resultan útiles a los alumnos, ya que muestran del avance en la comprensión de las distintas representaciones de un decimal que se logró en el grupo.

6.1.4 Dificultades persistentes en relación a las distintas representaciones de los decimales.

En el cuestionario final se solicitó a los estudiantes indicar los números que correspondían a un determinado punto de la recta numérica (Figura 6.29a). Se encontró que la mayoría de los estudiantes anotan los decimales correctamente gracias a la subdivisión que hacen de cualquier segmento en diez partes iguales para localizar, a partir de éstas, el lugar que ocupa un número. Por ejemplo, si tienen identificados los puntos de la recta que corresponden a decimales con cifras hasta décimos, dividen ese segmento en diez partes para encontrar un número con cifras hasta centésimos y así sucesivamente. En este caso, el segmento de recta presentado ya se encontraba dividido en diez partes iguales. Son pocos los alumnos que colocan números que no corresponden al punto indicado.

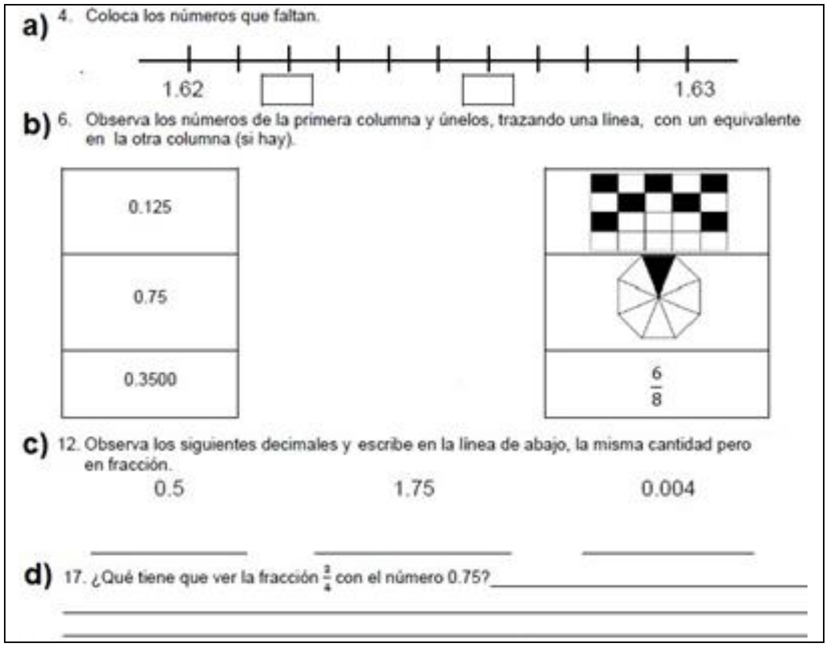


Figura 6.29. Reactivos relacionados a las distintas representaciones de los decimales.

Otro de los reactivos consistió en relacionar tres decimales (representación con punto) con la fracción y el área sombreada de una figura correspondientes a dichos decimales (Figura 6.29b). Esto con la intención de evidenciar la comprensión que lograron los alumnos respecto de las distintas representaciones que se pueden hacer de un decimal. Con ello se identificó que solo una tercera parte de los estudiantes logró relacionar correctamente los tres decimales con la fracción y la superficie equivalentes, otra tercera parte logró relacionar solamente uno o dos decimales. La tercera parte restante no relacionó ningún decimal con alguna de sus representaciones, lo cual muestra que siguen existiendo obstáculos para establecer dichas equivalencias. Probablemente el elemento principal que impidió que los estudiantes establecieran las relaciones adecuadas fue la operatividad con el algoritmo de la división, ya que ese aspecto se había identificado como problemático durante las sesiones.

Al solicitar a los estudiantes representar con alguna fracción un decimal dado (Figura 6.29c), la mayoría recurre a las fracciones decimales con denominador 10, 100 o 1000, siendo la minoría quien utilizan fracciones con denominadores distintos. Esto indica que los estudiantes logran dominar el uso de las fracciones decimales. (con denominadores 10, 100 o 1000) pero que existe dificultad para hacer uso de fracciones equivalentes con denominadores distintos a los ya mencionados. Pocos estudiantes muestran confusiones para encontrar la expresión de la forma $\frac{a}{b}$ que corresponde a un decimal, al considerar las cifras del número y distribuirlas de en forma de fracción, por ejemplo, al observar el número 1.75, colocaban fracciones como $\frac{1}{75}$, sin verificar que no eran representaciones equivalentes.

Finalmente, se observó que los alumnos establecen generalizaciones en relación a las fracciones más utilizadas en el ámbito escolar, al reconocer por ejemplo, que $\frac{1}{4}$ siempre será equivalente a 0.25. Estas generalizaciones o reglas establecidas, permiten a los estudiantes aplicarlas en todo momento con mayor facilidad. En cambio, al tratarse de fracciones distintas a medios, cuartos y octavos, se presentan dificultades, ya que no hay alguna conclusión o regla que les ayude a identificar la equivalencia.

Capítulo 7.

Resultados:

-Introducción a la propiedad de densidad.

CAPÍTULO 7. RESULTADOS

• INTRODUCCIÓN A LA PROPIEDAD DE DENSIDAD.

En este capítulo se presentan los resultados encontrados a través de la investigación realizada, relacionados con los números decimales como puntos en la recta, para introducir a los estudiantes a la noción de densidad.

7.1 Análisis de las sesiones correspondientes a los decimales como puntos en la recta como instrumento de acercamiento a la propiedad de densidad.

En este rubro se trabajó una sesión para permitir a los estudiantes un primer acercamiento a la propiedad de densidad, retomando la recta numérica como instrumento para mejorar a comprensión en los estudiantes.

7.1.1 Sesión 7: Los puntos de la recta como instrumento para la aproximación a la propiedad de densidad.

La sesión se desarrolló mediante dos actividades cuyo objetivo fue favorecer en los estudiantes la comprensión de la noción de densidad de los números decimales y su representación en forma de fracción y en la recta numérica.

Descripción de la actividad 1: Se organizó a los estudiantes en parejas a cada una de las cuales se le entregó una hoja donde se encontraban tres segmentos de recta subdivididos de manera distinta y en los cuales estaba marcado un segmento más pequeño, en el que los alumnos debían colocar al menos dos decimales que pudieran encontrarse en dicho segmento (Figura 7.1). Sólo uno de los segmentos se encontraba dividido en décimos, los otros dos estaban divididos en cuatro y cinco segmentos respectivamente. Esto a fin de verificar si la división de la recta continuaba siendo una dificultad para ubicar un decimal.

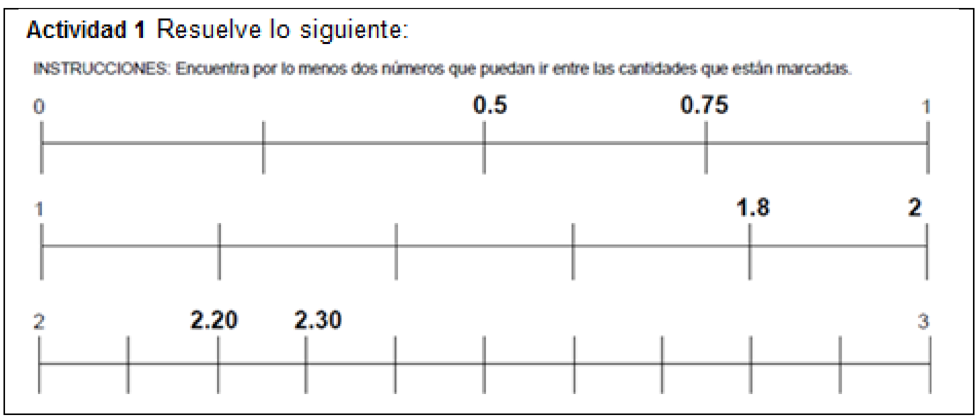


Figura 7.1. Actividad presentada a los estudiantes.

Después que los alumnos hubieron dialogado en parejas sobre cómo encontrar un número entre dos decimales dados, se procedió a la explicación de forma grupal de los distintos números propuestos, así como los procedimientos utilizados para dicho fin. Las alumnas A-1 y A-2 explicaron lo que realizaron:

> *"Nosotras dividimos en veinticinco [el segmento comprendido entre .5 y .75], porque de cinco décimos a setenta y cinco centésimos faltan veinticinco centésimos, por eso lo dividimos así y pusimos estos números (Figura 7.2)… Del 0.5 contamos diez décimos y pusimos el 0.60 y de ahí contamos otros diez y pusimos el 0.70".*

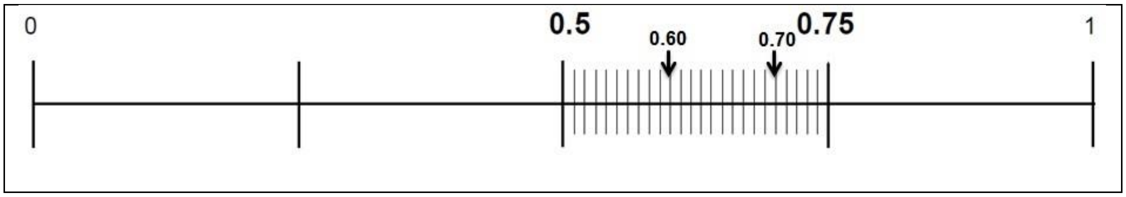


Figura 7.2. Números entre 0.5 y 0.75, encontrados por los estudiantes A-1 y A-2.

Solamente otra pareja de alumnos dividió de igual forma, sin embargo, la mayoría reconoció que con la partición que hicieron las alumnas A-1 y A-2 se podía identificar otros decimales entre 0.5 y 0.75. Los estudiantes A-3 y A-4 comentaron que ellos dividieron de distinta forma el segmento indicado.

> *"… dividimos a la mitad y ahí era 0.6, ese otro* (segmento entre 0.6 y 0.75) *lo dividimos a la mitad y nos salió 0.65 (Figura 7.3a)".*

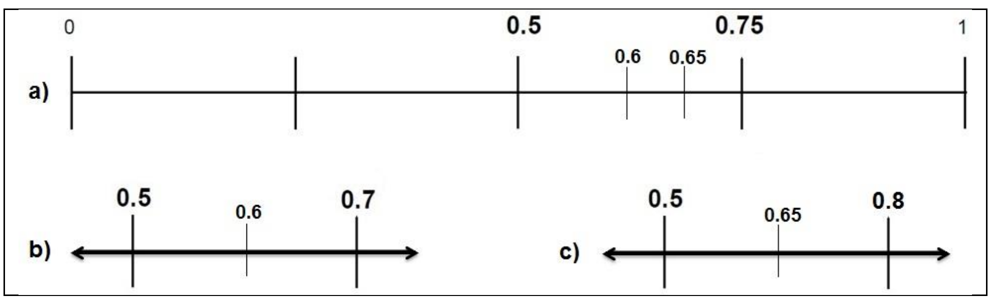


Figura 7.3. Números entre 0.5 y 0.75, encontrados por los estudiantes.

La mayoría de los estudiantes mencionó que esos números se encontraban mal ubicados:

> *A-5 "Porque ahí dice que es del 0.5 al 0.75 y entre esos números 0.6 no es la mitad".*
>
> *A-6 "Para que así fuera, tendría que estar el 0.7 (en el lugar del 0,75)"*
>
> *A-7 "Entonces la mitad sería 0.65"*

El estudiante A-5 identificó que entre 0.5 y 0.75, sí se encuentran los números 0.6 y 0.65, pero que éstos no se encontraban colocados en el lugar adecuado, ya que para que quede en medio el 0.6, el segmento utilizado debería abarcar del 0.5 al 0.7 tal como lo menciona el alumno A-6 (Figura 7.3b). Al identificar ese error, el estudiante A-7 propone que se considere al 0.65 como el número que se encuentra a la mitad del segmento antes mencionado, sin embargo los estudiantes se percatan que ese número también es incorrecto, ya que del 0.5 al 0.65 hay un diferencia de 15 centésimos, entonces el número al final del segmente debería ser 0.80 (Figura 7.3c), lo cual tampoco corresponde al segmento de recta presentado.

Al ver que ninguna de las ubicaciones era correcta, a pesar de que los números mencionados sí estaban en el rango indicado, la alumna A-8 presentó los números que ella encontró (Figura 7.4).

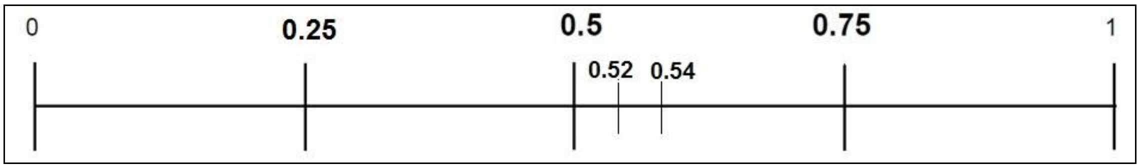


Figura 7.4. Números entre 0.5 y 0.75, encontrados por los estudiantes.

> *A-8 "Como aquí era 0.25, aquí 0.50 y aquí 0.75 (señala los números mencionados) entonces dijimos que éste era igual a 0.50 (indica el 0.5) y entonces entre el 0.50 y 0.75 encontramos 0.52 y 0.54… en realidad no lo dividimos bien (para saber el lugar en que debían colocarse) porque lo medimos y al dividirlo en diez no nos daba un número concreto, nada más los calculamos…".*

La mayoría de los estudiantes reconoció que esos números sí se encontraban entre 0.5 y 0.75, pero que como ya se había mencionado en la explicación, la ubicación solo era aproximada. Algunos alumnos proponían dividir el segmento en diez partes iguales para poder ubicar correctamente los números, pero otros compañeros comentaban que no se debía dividir en diez partes iguales sino en veinticinco. Pocos alumnos consideraban que el segmento se podía dividir ya fuera en diez partes o en veinticinco, y que de ambas formas se podrían ubicar los números. Al realizar la partición del segmento en diez, se percataron que no era adecuado (Figura 7.5a).

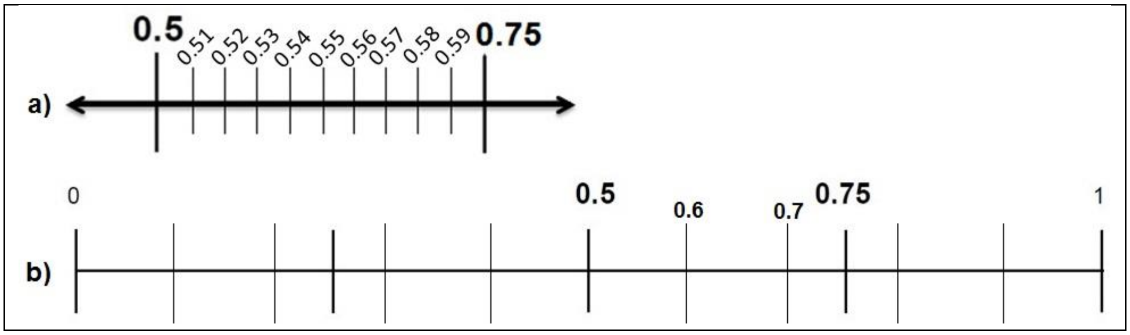


Figura 7.5. Partición del segmento de recta en diez partes iguales y ubicación de otros decimales.

Al dividir el segmento en diez partes y colocar los números que correspondían a cada punto marcado, se percataron que no era correcto, ya que del número 0.59 no sigue el 0.75, por lo que otros alumnos A-9 y A-10 propusieron dividir el segmento inicial en diez partes iguales y buscar los números que se encuentran entre 0.5 y 0.75 (Figura 7.5b).

Finalmente los estudiantes identificaron que todos los números mencionados en las explicaciones se encontraban entre 0.5 y 0.75, sin embargo, solamente en la explicación dada por las alumnas A-1 y A-2 y en la de los alumnos A-9 y A-10, se lograron colocar los números en el lugar correcto de la recta. Lo anterior evidenció que la principal dificultad de los estudiantes para ubicar decimales entre otros dos se encuentra en la subdivisión del entero o del segmento de recta con que se trabaje.

Los estudiantes A-11 y A-12 explicaron la estrategia seguida para encontrar dos decimales que pudieran ir entre 1.8 y 2 (Figura 7.6).

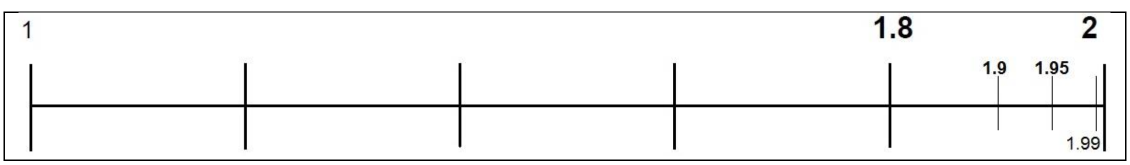


Figura 7.6. Ubicación de decimales entre 1.8 y 2.

A-11 y 12 "Dividimos la mitad y salió 1.9, luego lo partí a la mitad (el segmento entre 1.9 y 2) y me salió 1.95"

Los estudiantes se percataron que a diferencia de la recta anterior, en este caso sí fue útil dividir el segmento en dos partes para encontrar un decimal, el segmento resultante pudo volver a dividirse en dos, obteniendo otro decimal. Sin embargo, identifican que siempre es necesario observar el segmento entre el que se van a ubicar los números, a fin de establecer adecuadamente la forma en que éste se dividirá. Otros estudiantes indicaron los números que encontraron:

> *A-13 "Pueden ir muchos… casi llegando al número dos también puede ir un entero noventa y nueve centésimos, 1.99"*

> *A-14 "También puede ir 1.85... a la mitad de 1.8 y 1.9".*

Se observa que los estudiantes comienzan a localizar con mayor precisión otra serie de números que pueden encontrarse entre 1.8 y 2, por lo que se les pregunta si los hasta ahora mencionados son los únicos números que se pueden ubicar. La mayoría responde que hay muchos números aún, así que se les pregunta si puede haber algún número entre 1.85 y 1.9, a lo que responden que puede ir 1.86, 1.87…1.89. Se pregunta nuevamente a los alumnos si entre 1.86 y 1.87 puede existir algún número, ellos responden afirmativamente y comienzan a mencionar algunos números.

> *A-15 "Más o menos a la mitad puede ir 1.855"*

> *A-16 "Entre 1.85 y 1.855 puede ir 1.853, o podemos ir hasta diezmilésimos".*

> *A-17 "Entre 1.85 y 1.853 hay muchos, pueden ir un buen… porque los números nunca se terminan, bueno, en los decimales".*

En estos últimos comentarios se percibe que los estudiantes poseen ideas importantes que contribuirán a la futura adquisición de otro tipo de conocimientos como lo son los números racionales e irracionales por ejemplo, ya que logran encontrar más de un decimal entre dos decimales dados, aun cuando estos sean "falsos consecutivos" (Ávila; 2013); incluso, cuando el número llega a milésimos, los estudiantes reconocen que se pueden encontrar números que lleguen hasta diezmilésimos.

Respecto a la última recta, las alumnas A-18 y A-19 comentaron que:

A-18 y 19 "Nosotras repartimos en diez partes iguales y aquí debe de haber un número entre estos dos números así que pusimos 2.22, 2.25 y 2.28" (Figura 7.7).

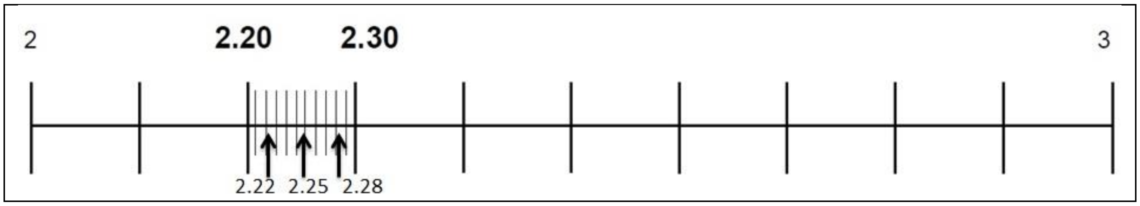


Figura 7.7. Ubicación de decimales entre 2.20 y 2.30.

Se puede apreciar que en las últimas dos rectas hubo menores dificultades respecto de la partición del segmento indicado, ya que la segmentación presentada favorecía la identificación de los décimos, centésimos o milésimos, según se requiriera.

Cuando los números indicados se expresaban en el orden de los décimos, por ejemplo 3.6 y 3.7, los estudiantes agregaban un cero a la derecha del número, convirtiendo a los décimos en centésimos, lo cual les permitía encontrar otros nueve números entre los dos propuestos; en este caso podrían ser 3.61, 3.62, 3.63… 3.69. Si los números se encontraban expresados en centésimos, los transformaban a milésimos y encontraban otros nueve números entre los señalados; por ejemplo, entre 3.63 y 3.64, los alumnos encuentran al 3.631, 3.632, 3.633… 3.639. Aunque ya no se solicitó encontrar números entre dos decimales con cifras hasta centésimos, considero que los estudiantes seguirían la misma estrategia hasta ahora empleada para encontrar otros números, tal como lo afirma el estudiante A-16, quien sugiere llegar hasta diezmilésimos.

Descripción de la actividad 2: Manteniendo la organización de los estudiantes en parejas, se les entregó una hoja donde se encontraban 3 segmentos de recta en los cuales se encontraban marcados dos decimales en alguna de sus representaciones -, con punto decimal o en fracción - a fin de que entre éstos encontraran otros dos decimales. (Figura 7.8)

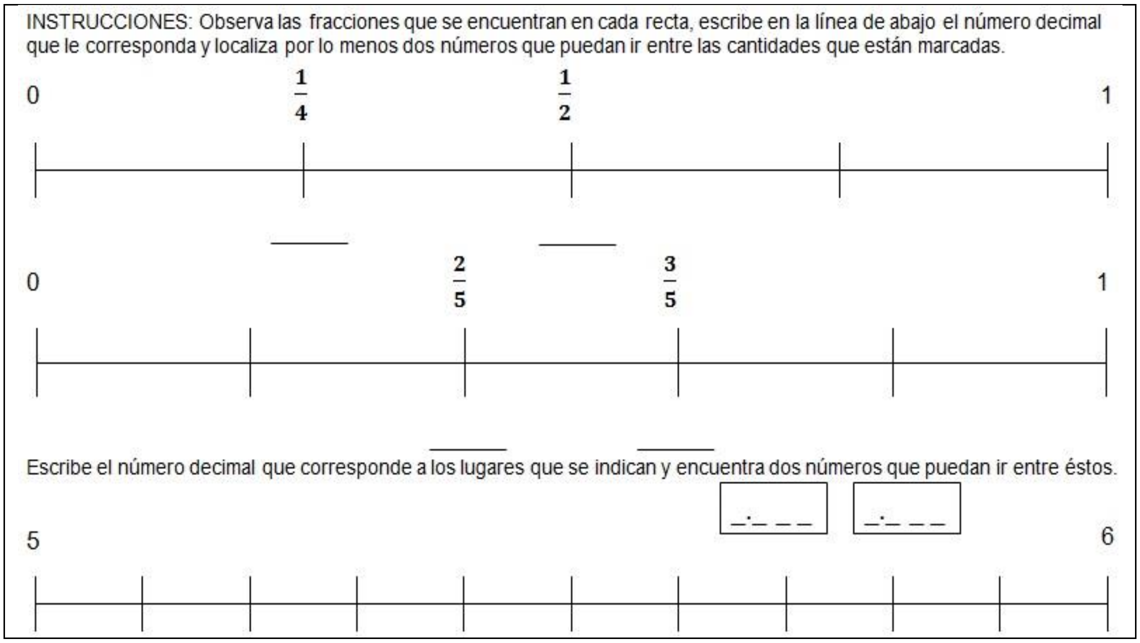


Figura 7.8. Segunda actividad presentada a los estudiantes.

La mayoría de los estudiantes identificó con facilidad la equivalencia entre $\frac{1}{4}$ y 0.25 y entre $\frac{1}{2}$ y 0.5, por lo que en el primer segmento de recta colocaron esos números sobre las líneas y procedieron a dividir el segmento comprendido entre los números 0.25 y 0.5 en 25 partes iguales que los alumnos consideraban como centésimos (Figura 7.9a), colocando números como 0.26 y 0.35 en las líneas correspondientes. Algunos otros alumnos dividieron el segmento de recta inicial en diez partes iguales (Figura 7.9b), y encontraron que entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$ están números como 0.3 y 0.4.

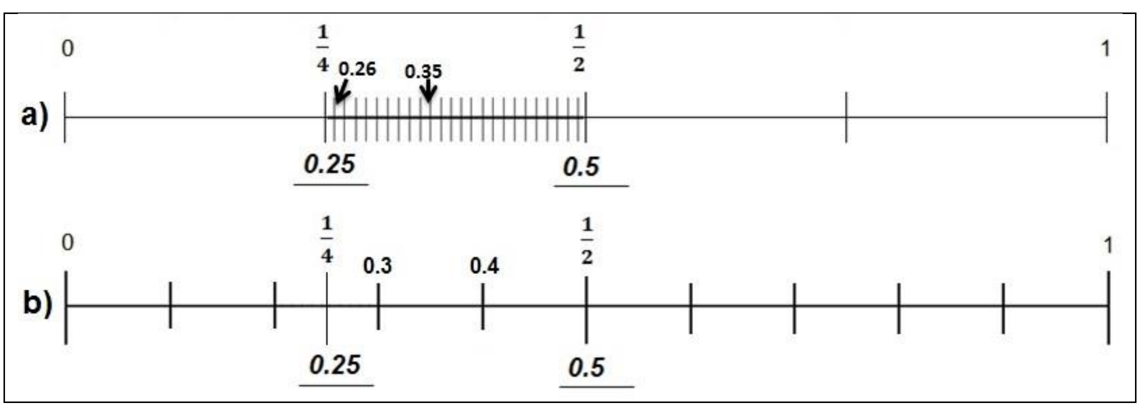


Figura 7.8. Decimales encontrados entre dos números dados.

Como el segundo segmento de recta se encontraba dividida en quintos, la mayoría de los estudiantes dividió a la mitad el segmento delimitado por $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$, con lo cual encontraron que ese punto correspondía a 0.5 y tomando cualquiera de los segmentos resultantes nuevamente a la mitad para encontrar al 0.45 o 0.55. Una minoría de alumnos realizó particiones del segmento en diez, lo que los llevó a que los números identificados estuvieran mal ubicados. En el tercer segmento, la mayoría de los alumnos dividió el segmento indicado en diez partes iguales, encontrando adecuadamente números entre 5.700 y 5.800.

7.1.2 Principales momentos en la comprensión los decimales como puntos en la recta como instrumento de acercamiento a la propiedad de densidad.

Hasta el momento el reconocimiento de que entre dos decimales dados siempre será posible encontrar otro, no representa gran dificultad para los estudiantes.

- ✓ La mayoría de los alumnos muestra tener apertura a la idea de que entre dos decimales cualesquiera, siempre se podrá hallar al menos otro decimal, esa comprensión se ve favorecida por la representación que se haga en la recta numérica.
- ✓ Se observa que los estudiantes realizan subdivisiones primordialmente en diez partes iguales, si es que los números dados así lo permiten. Este tipo de particiones les permite encontrar nueve números más entre dos números determinados. Cabe aclarar que esta idea se exploró muy someramente y sólo como un primer acercamiento a esta noción, quedando muchos aspectos por abordar debido a que el tema es complejo en sí mismo y genera múltiples interpretaciones por parte de los estudiantes (Ávila, 2013).

7.1.3 Dificultades persistentes en relación a los decimales como puntos en la recta como instrumento de acercamiento a la propiedad de densidad.

En los casos en lo que se presentan rectas divididas en segmentos diferentes a diez, algunos estudiantes tienen dificultad para determinar de qué forma se pueden dividir los segmentos definidos, a fin de localizar el punto de la recta para cada decimal en relación con la subdivisión definida.

Capítulo 8.

Resultados:

- Cálculo y operaciones.

CAPÍTULO 8. RESULTADOS

• CÁLCULO Y OPERACIONES.

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en la investigación, relacionados con el uso de los números decimales en la resolución y formulación de problemas que impliquen el uso de dichos números, así como la operatividad de los decimales mediante algoritmos como la suma, resta, multiplicación y división.

8.1 Análisis de las sesiones correspondientes a la operatividad con los decimales.

Como parte final del experimento de enseñanza para los números decimales, se incluyó la operatividad con dichos números, no se dejó hasta el final por considerarlo de mayor dificultad que los aspectos aquí trabajados, sino por considerar que requiere menor comprensión de aspectos propios de los decimales, al relacionarse más con las ideas que se tienen sobre el uso que se les da o a la utilidad práctica. Cabe mencionar que la operatividad con los números decimales (suma y resta de números decimales y multiplicación y división de números decimales entre y por números naturales) es uno de los aspectos que más se trabajan en las aulas de educación primaria en México (Ávila, 2008b).

En este aspecto se incluyeron dos sesiones, una de ellas relacionada con la aplicación de los algoritmos de suma, resta, multiplicación y división con números decimales a fin de identificar la aplicación práctica que les dan los estudiantes y otra dedicada a favorecer el rompimiento con la idea de que la multiplicación siempre “agranda” y la división siempre “achica”.

8.1.1 Sesión 8: Multiplicación y división con decimales.

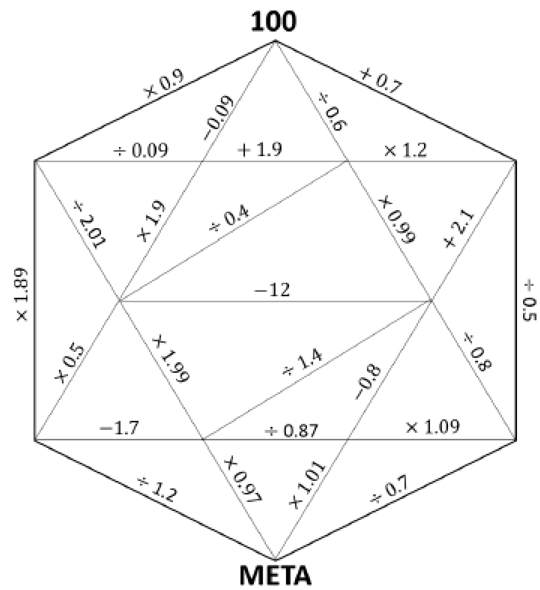
Esta sesión se diseñó con el objetivo de identificar las ideas que tenían los estudiantes al operar con los decimales, en específico con la multiplicación y división.

Para ello se planteó una actividad a partir de una situación desarrollada por el NCTM (Figura 8.1) en la que se solicitaba a los estudiantes lo siguiente: “Seguir la secuencia de operaciones que consideren les lleve a obtener el mayor número posible como resultado”. De este modo, los estudiantes evidenciarían la forma en que conciben el significado de las operaciones y los resultados que se obtendrán al efectuar las operaciones.

LA TELARAÑA DE LOS DECIMALES

INDICACIONES:

1. Sin hacer cálculos, elige el camino que consideres te dará más puntos y márcalo con algún color. Las reglas son las siguientes:
   a. Al empezar el juego tienes 100 puntos
   b. Debes llegar a la meta siguiendo el camino de las operaciones que pienses que te darán más puntos.
   c. No debes pasar dos veces por el mismo segmento ni por el mismo punto.



2. Haz los cálculos del camino que elegiste para obtener tu total. Puedes utilizar una calculadora.
3. Compara tus resultados con los de tus compañeros y comenten lo que observan.

Figura 8.1. Actividad presentada a los estudiantes.

La actividad que en esta investigación se denominó “Telaraña de los decimales” se trabajó de forma individual. A cada estudiante se le entregó una hoja, y conforme a las instrucciones dadas, debían marcar solamente un camino siguiendo las operaciones que consideraran aumentaría su puntuación; lo anterior sin pasar dos veces por el mismo segmento ni punto de intersección de las líneas y sin utilizar calculadora.

Después de que los estudiantes hubieron resuelto la actividad se inició la presentación de los resultados; se preguntó si alguien había obtenido un puntaje mayor a los 100 puntos con que habían comenzado, sorprendentemente el estudiante A-1 señaló haber obtenido 97.59 (siendo éste un puntaje menor al inicial) siguiendo las operaciones mostradas en la Figura 8.2.

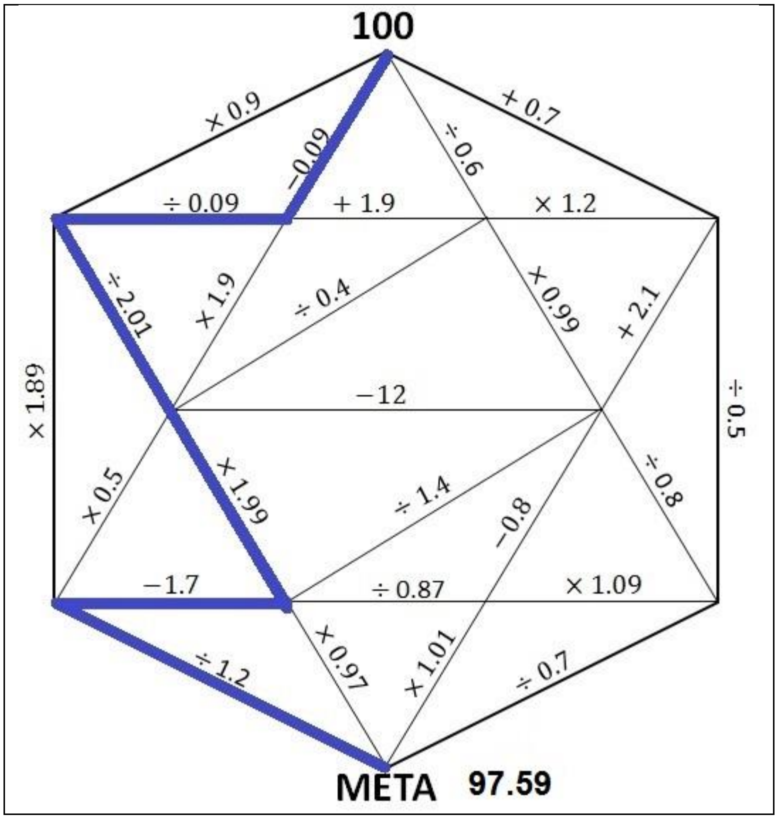


Figura 8.2. Resultado del estudiante A-1.

Se preguntó a los estudiantes por qué consideraban que el resultado del estudiante A-1 era menor a los 100 puntos con los que había iniciado, obteniendo comentarios como:

A-2 "Porque también las operaciones tenían de restar"

Haciéndose referencia a que en el recorrido seleccionado por A-1, se encontraban algunas operaciones de resta y consideraban que esas operaciones habían provocado la disminución del puntaje inicial.

A-3 "También hay tres divisiones y sólo una multiplicación,"

A-4 "Con la división se parte el número en partes iguales, eso me da un número más pequeño".

En los comentarios de los alumnos se hace evidente la idea que tienen sobre cada operación al considerar que cuando se hacen restas y divisiones, éstas siempre harán al número más pequeño, es decir, asocian la resta con quitar elementos de un conjunto, y la división con repartir en partes iguales, obteniendo como resultado conjuntos con menor número de elementos.

A continuación se verificó con la calculadora que el resultado de A-1 fuera correcto, encontrando que el resultado de 97.59 (Figura 8.3a) no correspondía a la secuencia de operaciones seleccionadas y que el correcto era 1097.6485 (Figura 8.3b).

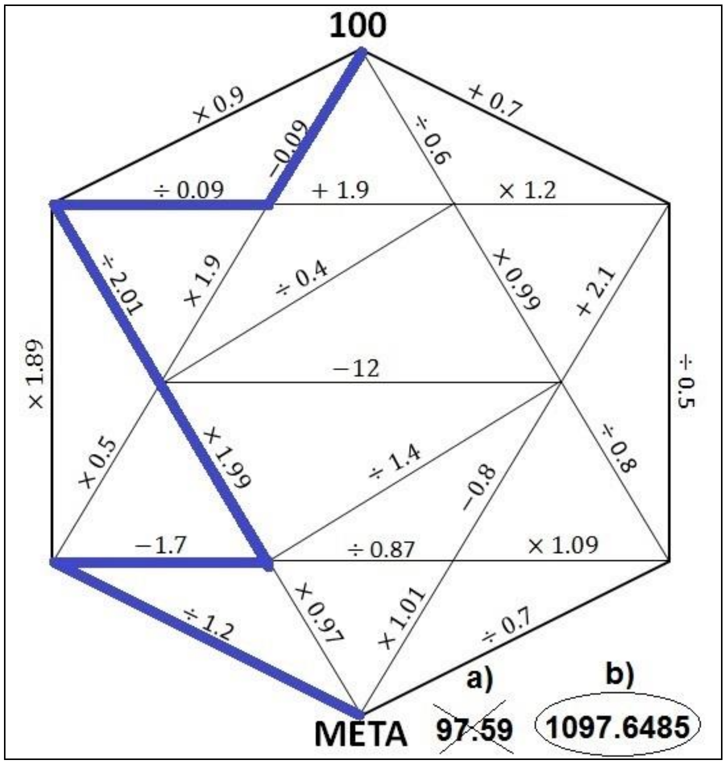


Figura 8.3. Resultados del estudiante A-1.

Una vez que se observó que el nuevo resultado era mayor, se preguntó a los estudiantes por qué creían que se obtuvo un número mayor a 1000, si se habían seguido en su mayoría restas y divisiones, y antes habían comentado que al efectuar esas operaciones siempre hacen que el número resultante sea menor. Como respuesta se obtuvieron los siguientes comentarios.

A-5 "Por los décimos, centésimos y milésimos que tienen esas operaciones, por eso a lo mejor le salió más".

La alumna A-5 consideraba que de alguna forma podría influir el valor de los números entre los que se divide, para lograr obtener un número mayor que el inicial, sin embargo no lograban dar claridad a esta idea y por lo tanto no lograba explicarla.

Al preguntar qué otros resultados obtuvieron, se indicaron números como 168, 366.42, 420, 164, 319.1, 141, 123, 450.15, 6011.87…

Se pidió al estudiante A-6, quien obtuvo un puntaje de 450.15, que presentara el recorrido que siguió (Figura 8.4), verificando que su resultado fuera correcto.

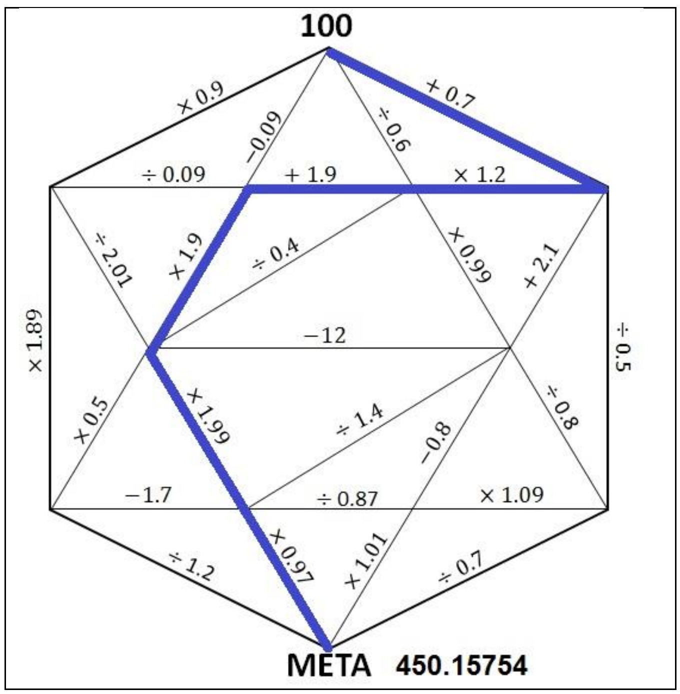


Figura 8.4. Resultado del estudiante A-6.

> *A-6 "Yo escogí el camino que tuviera más sumas y multiplicaciones porque si restaba me podría dar menos de cien… y si dividía tal vez sería más pérdida".*

El estudiante que obtuvo el puntaje de 6011.87544 (Figura 8.5) dijo:

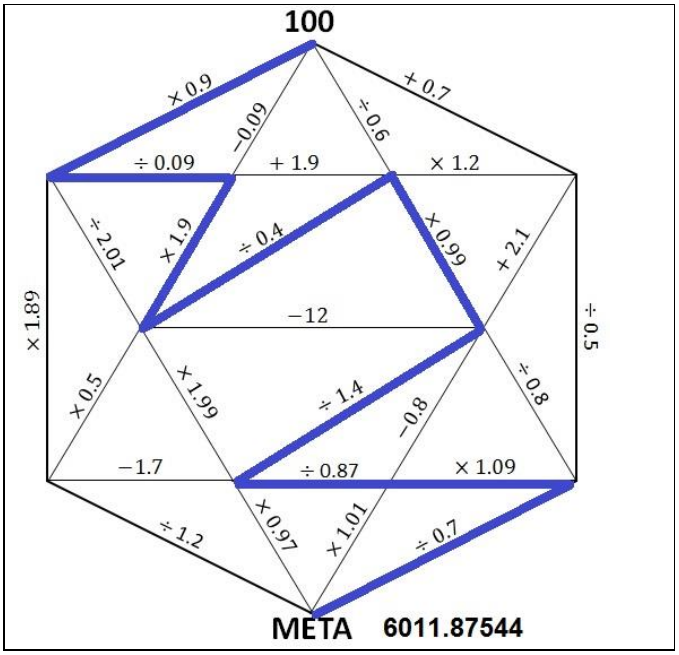


Figura 8.5. Resultado del estudiante A-7.

> *A-7 “Yo fui haciendo las operaciones desde el principio y fue que me salió ese número”.*

Este alumno no siguió las indicaciones de la actividad que consistían en marcar primeramente el recorrido que considerara lo llevaría a obtener el mayor resultado posible y finalmente hacer las operaciones para verificar el total obtenido. En vez de eso, fue realizando las operaciones y seleccionando el trayecto que aumentaba su puntaje. A pesar de ello, se observó que el camino marcado incluía únicamente multiplicaciones y divisiones, así que se preguntó a los estudiantes por qué consideraban que el resultado fue mayor que cien, obteniendo comentarios como:

> *A-8 “Por las multiplicaciones”*
>
> *A-9 “Para obtener un número más grande se deben observar las divisiones”*
>
> *A-10 “… o las cantidades”*
>
> *A-11 “En las divisiones no porque yo hice uno con puras divisiones y no me sale”*

Se propuso verificar que el resultado fuera correcto pero anotando los resultados después de cada operación para ver qué operaciones llevaban a obtener un número mayor (Figura 8.6).

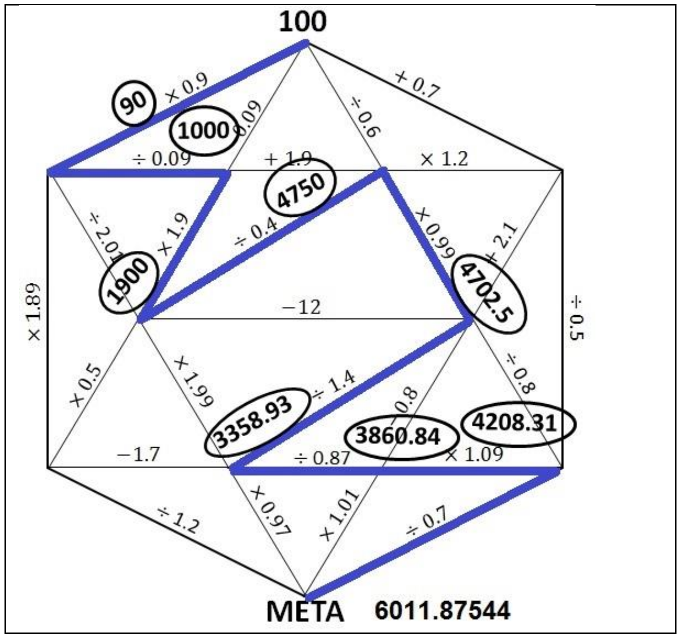


Figura 8.6. Resultados parciales del resultado obtenido por el alumno A-7.

Se retomó el comentario de A-6 quien anteriormente explicó que había elegido el camino de sumas y multiplicaciones porque consideraba que estas operaciones agrandarían el número, mientras que las divisiones lo harían más pequeño. Sin embargo, en la figura anterior se observaba que al multiplicar 100 por 0.9, el resultado era menor que el inicial, es decir, 90, y que al dividir 90 entre 0.09, el resultado se había hecho mayor que 1000, contrario a lo que se esperaba que sucediera por haber efectuado una división (que el resultado fuera un número menor que el inicial). Los estudiantes explicaron que:

> *A-12 "Es que multiplicó por un decimal y no por un entero... y la división pues igual por eso, porque igual era decimal".*

La alumna A-12 identificó que si un número se multiplica por otro que tenga números enteros, el resultado va a ser mayor, y si se multiplica por un número menor a la unidad, el resultado será menor, aunque la operación que se aplique sea la multiplicación. Con este comentario, algunos estudiantes comenzaron a identificar que la multiplicación no siempre agranda a un número y que la división no siempre lo hace más pequeño.

> *A-13 “Para hacer un camino que nos dé un resultado más grande podemos hacer un camino haciendo todas las divisiones”.*

Hasta ese momento los estudiantes no lograban identificar cómo es que algunas divisiones hacían que el número se agrandara, como sucedió al dividir 90 entre 0.09 obteniéndose 1000, o se hiciera más pequeño como cuando se dividió 4702.5 entre 1.4 obteniéndose 3860.84, así que propusieron seguir un recorrido donde se consideraran sólo las divisiones (Figura 8.7).

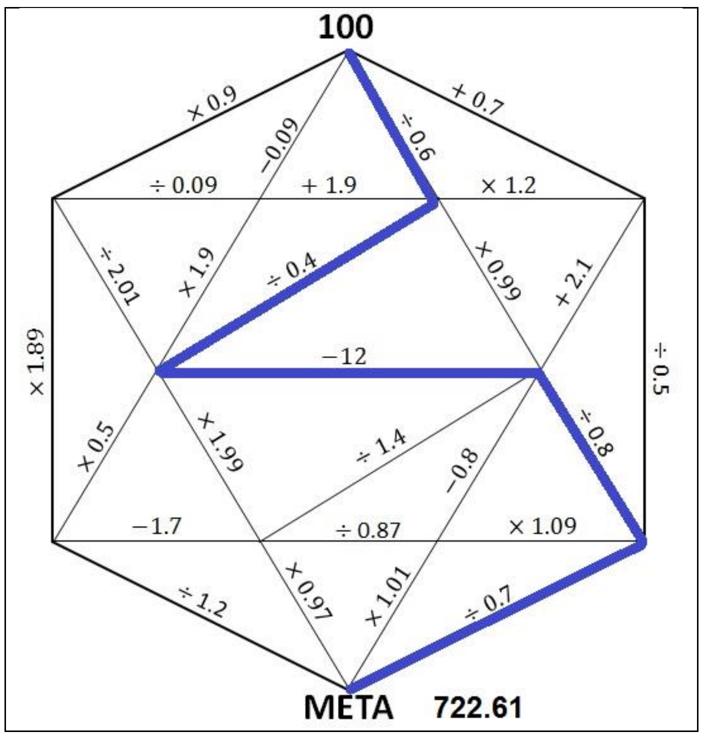


Figura 8.7. Recorrido sugerido por los estudiantes.

Al trazar el recorrido que sugirieron los estudiantes, el cual consistía en seleccionar la mayor cantidad de divisiones posibles, al considerar que al dividir con decimales el resultado siempre se agrandaría, y realizar las operaciones y obtener como resultado 722.61, observaron que no habían obtenido un resultado mayor que el anterior, 6011.87544. Finalmente observaron que al dividir un número entre un decimal menor que 1, el resultado se agranda y que cuando se divide entre un número que contenga enteros, el resultado será menor; contrario a lo que ocurre con la multiplicación, donde al multiplicar por un decimal menor que 1, el resultado se hará menor y al multiplicar por un decimal con números enteros, el resultado será mayor.

Una vez realizadas las anteriores generalizaciones, los estudiantes reconocieron que al utilizar decimales, las operaciones no tienen una sola tendencia (multiplicación= aumentar y división=disminuir), sino que esto depende del número por el que se multiplica o entre el que se divide: si es menor o mayor que 1.

8.1.2 Sesión 9: Resolución de problemas con decimales.

Con la finalidad de que los estudiantes aplicaran los algoritmos de suma, resta, multiplicación y división con números decimales en la resolución de problemas, y evidenciar las dificultades a las que se enfrentan al hacerlo, se plantearon dos actividades.

Descripción de la actividad 1: Se organizó a los estudiantes en parejas, a cada una de las cuales se les entregaron tres tarjetas con problemas de suma, resta, multiplicación o división (Figura 8.8) para que los analizaran y resolvieran, indicando que observaran bien si todos los problemas se podían resolver o no, ya que todos los problemas podían resolverse mediante la aplicación de un algoritmo, pero no todos tenían una solución lógica de acuerdo al contexto en el que se plantearon.

Actividad 1 Lee atentamente los siguientes problemas e identifica si son correctos y se pueden resolver. Discute con tus compañeros sobre tus afirmaciones.

1.- Enrique tiene 36.3 estampas y ganó 12.8 más. ¿Cuántas estampas tiene en total?	7.- Andrea tenía 26.5 crayones y su amiga Sandra le regaló 5.4 más. ¿Cuántos crayones tiene Andrea?
2.- María tiene un pastel de 3.5 kg. que quiere repartir entre 14 personas. ¿Cuántas rebanadas de pastel le tocará a cada invitado?	8.- Para el día del niño, en la escuela se compraron 423.7 pelotas y se repartieron 398.8. ¿Cuántas pelotas sobraron?
3.- Toño tenía muchas canicas así que las ordenó en bolsitas con 12.5 canicas cada una. Si llenó 15 bolsas. ¿Cuántas canicas tenía?	9.- En la feria, Carlos ganó 3.5 juguetes y un bono que multiplicaba sus regalos por 2.5. ¿Cuántos juguetes ganó en total?
4.- Para una fiesta se compraron 14 kg. de pollo, si los metieron en cajas de 3.5 kg. ¿Cuántas cajas se llenaron?	10.- Don José tiene tres parcelas, una de 262.5 m^2, otra de 353.8 m^2 y la última de 275.4 m^2. ¿Cuánto miden en total las parcelas de Don José?
5.- Un cocinero compró 15.7 kg. de pescado y cocinó 9.9 kg. ¿Cuántos kilos de pescado le sobraron?	11.- Areli tiene un rollo con 120 metros de listón, si quiere hacer moños de 1.5 m. ¿Cuántos moños hará?
6.- Para su fiesta, Laura compró 75 paletas de hielo que costaban $3.80 cada una ¿Cuánto pagó?	12.- Marcos llenó 135 botellas con 0.9 litros de leche cada una. ¿Cuántos litros de leche utilizó para llenar las botellas?

Figura 8.8. Problemas planteados a los estudiantes.

Todos los estudiantes indicaron haber encontrado una solución a los problemas que les correspondía resolver (los problemas se repartieron de forma aleatoria entre las parejas de alumnos), por lo que se presentaron algunos de los resultados obtenidos. Los alumnos A-1 y A-2 resolvieron en el pizarrón el problema No. 1.- **Enrique tiene 36.3 estampas y ganó 12.8 más. ¿Cuántas estampas tiene en total?**

> *A-1 y A-2 “Nosotros hicimos una suma porque dice que tenía 36.3 y ganó 12.8 estampas más* (realizaron la suma 36.3 + 12.8 = 49.1)*”.*

Los estudiantes de los demás equipos coincidieron en que tanto el problema como el resultado eran correctos, ya que en total se tenían 49.1 estampas. Hasta ese momento los estudiantes sólo consideraban que con el hecho de poder aplicar un algoritmo a los datos indicados en el problema y obtener un resultado, el problema estaba bien formulado y se podía resolver, sin prestar atención si el problema tuviera una solución coherente en la vida real. Se procedió después a resolver el segundo problema: **María tiene un pastel de 3.5 kg. que quiere repartir entre 14 personas. ¿Cuántas rebanadas de pastel le tocará a cada invitado?,** el cual explicaron los alumnos A-3 y A-4.

> *A-3 y A-4 “Nosotros no le entendimos bien y no lo pudimos resolver”.*

> *A-5 y A-6 “Aquí si pudimos resolverlo, nosotros dividimos las personas y el pastel (Figura 8.9a) y nos salió que le tocan a cuatro rebanadas”.*

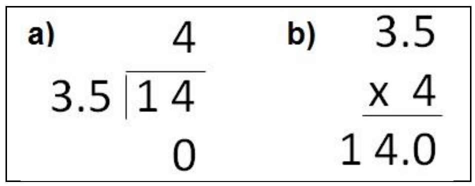


Figura 8.9. Operaciones realizadas por los estudiantes

> *A-7 “Pero es que ahí estarían contestando la pregunta 4:* **Para una fiesta se compraron 14 kg, de pollo, si los metieron en cajas de 3.5 kg. ¿Cuántas cajas se llenaron?** *La operación que ellos realizaron es para este problema, no para el problema 2”.*

La mayoría de los estudiantes se encontraban confundidos respecto a si la operación realizada por los estudiantes A-5 y A-6 era correcta para resolver el problema o no, o si con esa operación se resolvían los dos problemas antes mencionados; mientras discutían al interior de los equipos, los alumnos A-8 y A-9 decidieron explicar la forma en que ellos lo habían resuelto.

> *A-8 y A-9 “Lo contestamos de otra manera, hicimos una multiplicación… Buscamos un número que multiplicado por 3.5 nos diera 14.0 y lo multiplicamos por 4, así que nos salió 4 rebanadas (Figura 8.9)”.*

Los alumnos identificaron que mediante ambos procedimientos se había llegado al mismo resultado, que según los estudiantes era 4 rebanadas, la mayoría estaban convencidos de que esa respuesta era correcta. Se preguntó a los estudiantes si era adecuado considerar para la división, el número de personas entre el peso del pastel, y si ello arrojaría como resultado obtener el número de rebanadas que le corresponde a cada persona, enfatizando en las magnitudes utilizadas más que en las cantidades. Sin embargo, la mayoría afirmaba que sí se podía obtener el número de rebanadas y que el problema también era adecuado, siendo pocos los estudiantes que se encontraban confundidos y dudaban sobre si el problema estaba bien formulado o no.

Respecto al tercer problema: **Toño tenía muchas canicas así que las ordenó en bolsitas con 12.5 canicas cada una. Si llenó 15 bolsas. ¿Cuántas canicas tenía?**, el alumno A-10 comentó que:

> *A-10 "Tenía grupos de 12.5 canicas y eran 15 bolsitas por eso las multiplicamos y nos salió que tenía 187.5 canicas".*

La totalidad de alumnos del grupo estuvieron de acuerdo en que tanto el problema como el resultado eran correctos. Se resolvieron la mayoría de los problemas que los estudiantes consideraron que estaban bien formulados, debido a que todos tenían solución aplicando alguno de los algoritmos (suma, resta, multiplicación o división), sin identificar que algunos no tenían una solución coherente en la vida real para incluir los decimales, tal como en el problema No. 7: **Andrea tenía 26.5 crayones y su amiga Sandra le regaló 5.4 más. ¿Cuántos crayones tiene Andrea?**, mismo que los estudiantes resolvieron con la aplicación de una suma (26.5 + 5.4= 31.9 crayones), sin percatarse que difícilmente se pueden tener cantidades como 26.5, 5.4 o 31.9 crayones, ya que en estos objetos no es posible obtener fácilmente las particiones indicadas y, por otra parte, carece de coherencia hablar de décimos de crayón en una situación real.

Se preguntó a los estudiantes si los números decimales se pueden utilizar en cualquier contexto, obteniendo respuestas como las siguientes:

> *A-11 "Si hacemos una resta o suma no podría ir muy bien que usemos la fracción".*

El alumno A-11 intentó explicar que los números decimales se pueden utilizar en lugar de las fracciones, ya que permiten operar con ellos con mayor facilidad que con las fracciones. Después de este comentario se preguntó a los estudiantes si era adecuado utilizar las fracciones al hablar por ejemplo, de estampas, como sucede en el problema 1 o con canicas como en el problema 3. Se obtuvieron algunos comentarios como los enunciados por los estudiantes A-12, A-13, A-14, A-15 y A-16:

> *A-12 "No es correcto porque ni modo que las divida (las estampas)".*
>
> *A-13 "El problema (1) sí es correcto (porque tiene solución), pero usar lo de las estampas no".*
>
> *A-14 "En el segundo problema no se pueden saber las rebanadas porque se están dividiendo kilogramos, entonces el resultado es en kilogramos, no en rebanadas".*
>
> *A-15 "El tercero (problema) sí se puede resolver pero el contexto está mal porque no se pueden dividir las canicas…"*
>
> *A-16 "El cuarto problema sí se puede porque está hablando de kilos, ese sí es correcto".*

Se continuó comentando el resto de los problemas, y se encontró que conforme se avanzaba en su lectura y resolución, así como en la discusión, los estudiantes consideraban que un problema estaba mal formulado en los casos en que éste no tenía solución, o cuando el contexto en el que se aplican los decimales no es adecuado. Concluyeron que cuando se trata de magnitudes como peso, tiempo, distancia, entre otras, expresadas a través de unidades de medida como kilogramos, metros, centímetros u horas, sí es adecuado utilizar los números decimales, pero que cuando se habla de objetos como juguetes, crayones, canicas, etc., no siempre es adecuado emplear los decimales debido a que en la vida real, éstos repartos no tienen sentido.

Descripción de la actividad 2: Manteniendo la organización de los estudiantes en parejas se entregó a cada una, dos tarjetas que contenían alguna de las operaciones mostradas en la figura 8.10, a fin de que formularan un problema que pudiera resolverse con dichas operaciones.

Actividad 2 Escribe y resuelve un problema que se pueda resolver con cada una de las siguientes operaciones.

14 x 7.5	125.3 + 303.09	293.4 – 71.8	42 ÷ 3.8

Figura 8.10. Operaciones presentadas a los estudiantes.

Cada problema formulado se presentaría a sus compañeros a fin de determinar si el contexto en el que se utilizaron y la forma en que se plantearon eran adecuados o no, y evidenciar las principales dificultades encontradas ya sea en el planteamiento o resolución. Algunos de los problemas presentados por los estudiantes se muestran en la figura 8.11.

a) A Juan le dejaron de tarea unas sumas, la más difícil para él fue:
125.3 + 303.09
¿Cuánto le salió?
R= 428.39

b) A Filomena le dejaron de tarea una división, y la más difícil para ella fue:
42 ÷ 3.8
¿Cuánto le salió? R= 11.05

c) Víctor compró 125.3 m. de listón rojo y 303.09 m de listón azul. ¿Cuánto compró en total?

$$\begin{array}{r} 125.3 \\ +\ 303.09 \\ \hline 428.39 \end{array}$$

R= 428.39 m.

d) Santiago tiene 3.8 kg de pastel, si quiere repartirlo entre sus 42 amigos ¿Cuánto le tocará a cada uno?

$$\begin{array}{r|l} & 10.10 \\ \hline 3.8 & 4\,2 \\ & 4\,0 \\ & \ \ 2 \end{array}$$

R= 10.10

e) Ángela compró 293.4 gramos de chocolate, si se comió 71.8 gr. ¿Cuántos gramos le quedan en total?

$$\begin{array}{r} 293.40 \\ -\ \ 71.30 \\ \hline 221.60 \end{array}$$

R= 221.60 g.

f) Karina compró 14 m de tela, si el metro cuesta $7.5 ¿Cuánto pagará por los 14 metros de tela?

$$\begin{array}{r} 1\,4 \\ \times\ 7.5 \\ \hline 7\,0 \\ 9\,8\ \ \\ \hline 1\,0\,5.0 \end{array}$$

R= $ 105

Figura 8.11 Problemas formulados por los estudiantes.

Los contextos en los que los estudiantes utilizaron los decimales fueron variados. Hubo quienes a fin de evitar cometer errores, plantearon una situación escolar como en la figura 8.11a y b, donde el problema consiste solamente en realizar la operación indicada, sin hacer uso de alguna magnitud o situación cotidiana como se hace en los ejemplos c, e y f, en los que se introducen las magnitudes de longitud y peso principalmente. Pocos alumnos aún mostraron dificultades para utilizar los decimales en contextos reales, pero que además fueran lógicos, como se observa en el problema d, donde los estudiantes intentan usar los decimales haciendo uso del peso a través de una expresión en kilogramos, pero relacionando incorrectamente los datos, ya que dividen las 42 personas entre los 3.8 kg de pastel que se tienen, sin percatarse que debían haber efectuado la división de forma inversa, dividiendo los kilogramos de pastel entre la cantidad de invitados para obtener la cantidad de pastel que le correspondería a cada uno.

8.1.3 Principales momentos en la comprensión de la operatividad con los decimales.

A continuación se enlistan los que se identificaron como principales momentos en la operatividad con los decimales:

- ✓ Al iniciar la actividad, la gran mayoría de los estudiantes consideraba que al efectuar una multiplicación sobre cualquier número, éste siempre se agrandaría y daría por resultado un número mayor que inicial, y que al realizar una división se daría el efecto contrario, es decir, el resultado de la división siempre sería un número menor que el número inicial. Estas ideas fueron confrontadas mediante ejemplos en los que la división agrandaba al número mientras que la multiplicación lo hacía más pequeño, generando en los estudiantes una confusión inicial respecto a dicha situación y provocando que algunos de ellos consideraran que en los decimales las operaciones siempre tenían el efecto contrario al que tienen al operar con números naturales, es decir, que la división con decimales siempre haría al número mayor y la multiplicación siempre lo haría menor.

  A través de la discusión grupal y la realización de preguntas intencionadas, la mayoría de los estudiantes logró identificar que tanto la división como la multiplicación pueden agrandar o reducir un número, pero que esto depende de las características de los números con los que se trabaje. Por ejemplo, si un número se multiplica por un decimal que contenga enteros, el resultado será mayor, y si es menor que la unidad, el resultado será menor mientras que en la división es al contrario, si el número entre el cual se divide es mayor que la unidad, el resultado será menor, y si es menor que el entero, el resultado será mayor que el inicial. Estas generalizaciones constituyeron un gran avance en la forma en que los estudiantes conceptualizan las operaciones.

- ✓ Gran parte de los alumnos inicialmente consideraban que un problema era adecuado mientras existiera una operación o algoritmo que permitiera relacionar y operar con los datos y obtener un resultado, sin considerar que el contexto en el que éstos se plantean también influyen en que el problema tenga o no sentido en la vida real. Sin embargo, después del análisis de diversos problemas, logran identificar que hay situaciones en las que no es conveniente el uso de los decimales, como cuando se trata de objetos en los que no se puede ni tiene sentido efectuar la equipartición, como lo son canicas, pelotas, lápices, etc., mientras que en otras sí tiene sentido hacerlo, como en la medición de magnitudes, tales como peso, longitud, distancia y tiempo, entre otras.

8.1.4 Dificultades persistentes en relación a la operatividad con los decimales.

En el cuestionario aplicado al final de este experimento de enseñanza se consideraron 4 reactivos (Figura 8.12) para evidenciar las principales dificultades persistentes en los estudiantes respecto a la operatividad con los decimales.

14. De cada par de operaciones, encierra la que consideres que dará el resultado mayor.

4 x 3	ó	4 ÷ 3

4 x 0.3	ó	4 ÷ 0.3

19. Resuelve el siguiente problema:
Para la fiesta de su hija, Doña Mari compró 25 kilos de pollo por los cuales pagó $887.50.
¿Cuál es el precio de cada kilo de pollo?

20. Inventa y resuelva un problema que se pueda resolver con la siguiente operación: 45.5 x 2.50

Figura 8.12. Preguntas relacionadas a la operatividad con los decimales.

En las respuestas de los alumnos se observó que la mitad de ellos logra analizar los números involucrados en una multiplicación y en una división a fin de determinar con qué operaciones se obtendrá un resultado mayor. Pero en algunos estudiantes permanece la idea de que la multiplicación siempre agranda y la división achica o, a la inversa, como resultado de las interacciones sobre esta cuestión aparece la idea contraria: en los decimales la división siempre agranda y la multiplicación siempre achica sin importar las características de los números involucrados.

En la resolución de problemas, la mayoría de los estudiantes realizan correctamente la operación correspondiente obteniendo el resultado adecuado, sin embargo, poco menos de la mitad del grupo presenta alguna de las siguientes dificultades al operar con los decimales:

- ✓ Formulan correctamente la división, pero presentan dificultades con la operatividad del algoritmo, lo cual genera resultados incorrectos.
- ✓ No identifican la operación que resulta adecuada para dar respuesta al problema, por lo que eligen cualquiera de las cuatro operaciones básicas para trabajar con los datos presentados.
- ✓ En relación a la formulación de problemas a partir de una operación dada, cerca del 40% de los estudiantes logró formular problemas adecuados en cuanto al contexto y la operación útil para resolverlos, sin embargo se evidenciaron las siguientes dificultades en el resto de los estudiantes:

  - El 30% de los alumnos logró plantear problemas utilizando los decimales en ámbitos adecuados donde se hace uso de unidades de medida como kilogramos y metros, pero la forma en que se plantea el problema no permite resolverlo con la operación indicada, por lo que obtienen resultados incorrectos.
  - El otro 30% de los estudiantes plantea el problema de forma que se puede efectuar la operación indicada, pero el contexto en el que se introducen los decimales no es adecuado.

- ✓ En general persisten dificultades relacionadas con identificar contextos en los que tiene sentido utilizar los decimales, ya que muchos alumnos aún consideran que mientras los datos presentados en el problema permitan realizar alguna de las operaciones, éste es correcto.

Capítulo 9.

Conclusiones y discusión.

CAPÍTULO 9. CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

En este capítulo se presentan las conclusiones obtenidas una vez que se hubo aplicado el experimento de enseñanza diseñado con el fin de identificar los momentos clave en el proceso de aprendizaje de los números decimales en alumnos de sexto grado de primaria. Estos momentos se identificaron a través de la argumentación que los estudiantes daban a la forma en que resolvían las actividades y ejercicios presentados a través de las sesiones de trabajo.

Diversas investigaciones han demostrado que la comprensión de los números decimales representan para los estudiantes de los grados equivalentes a lo que en nuestro país corresponde a quinto y sexto grados de educación primaria, cierto tipo de dificultades, algunas de ellas derivadas de la forma en que éstos se presentan en la escuela, donde se muestran solamente como aquellos números que se escriben con un punto decimal. La forma de enseñanza común en las escuelas provoca que los estudiantes consideren que es la aparición del punto la que les da el nombre de números decimales. Dicha caracterización, según afirman algunos investigadores es inevitable en un primer momento, pero en las aulas se debe avanzar hacia la distinción entre el objeto matemático (número decimal) y sus representaciones (formas).

El tratamiento común que se da a los decimales, impide que los estudiantes reconozcan las propiedades que los caracterizan. Conforme a los datos proporcionados por investigaciones previas, se sabe que generalmente en las aulas de las escuelas mexicanas se tiende a promover una versión restringida de las expresiones equivalentes de los decimales, priorizando las representaciones con punto y en menor medida las representaciones correspondientes de la forma $\frac{a}{b}$, por lo que a través de las actividades incluidas en el diseño del experimento de enseñanza se procuró ampliar esta visión en los estudiantes.

A través de la presente investigación se ratificó que algunas dificultades reportadas en otras investigaciones se presentan también en los estudiantes del grupo con que trabajamos, los cuales se relacionan con:

- Escritura de los decimales y su relación con la unidad
- Equivalencia entre distintos órdenes de la parte fraccionaria de los decimales.
- Comparación y orden.
- Distintas representaciones de los decimales.
- Noción de densidad.
- Cálculo y operaciones.

Para cada uno de los aspectos antes mencionados, se trabajó una o dos sesiones en donde se pretendía, a través de actividades, que los estudiantes superaran algunas de esas dificultades.

En general se identificó que la mayoría de los estudiantes mejoró significativamente su comprensión sobre los números decimales, los cuales pasaron de ser sólo aquellos que tienen, como parte su escritura, un punto decimal, a ser aquellos que

A-1 "…se pueden convertir en fracciones decimales"

> *A-2 "representan la parte de un entero y tienen décimos, centésimos y milésimos"*
>
> *A-3 "es como encontrar números [puntos] en la recta numérica"*
>
> *A-4 "… es un número que sirve para todo [medición] y nos ayuda en nuestra vida cotidiana"*
>
> *A-5 "es un número con punto decimal pero que también se puede escribir de otras formas, [por ejemplo] como con fracción".*

En los comentarios anteriores de los estudiantes, se observa que han superado la distinción de números con punto como único referente para identificar los decimales, lo cual es necesario para lograr la comprensión de otros aspectos de mayor nivel de complejidad como las equivalencias, sus distintas representaciones, la densidad, entre otros.

Una de las ideas iniciales que mostraron los alumnos respecto a la escritura de los decimales, es que consideran que el nombre del número está relacionado con la cantidad de cifras después del punto, es decir, si el número tiene una cifra después del punto, se estará hablando de décimos, si tiene dos cifras serán centésimos y si tiene tres cifras el número estará dado en milésimos. Esta idea les permitió reconocer la diferencia entre la identidad de un número y la equivalencia que puede tener con otros. Un ejemplo claro de ello tuvo lugar en la sesión 1, donde de forma accidental se solicitó a los estudiantes relacionar el número 0.060 con el nombre seis centésimos, siendo la gran mayoría de alumnos quienes afirmaban que el nombre indicado no correspondía al número dado a pesar de que ambos eran equivalentes y pudieran representar la misma cantidad.

Un aspecto relevante que se identificó en los alumnos es que tienen conocimientos sobre los distintos órdenes de la parte fraccionaria de los decimales, es decir, reconocen que un décimo está relacionado con tomar una de diez partes, el centésimo con tomar una de cien y un milésimo con tomar uno de mil. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes conoce esto sólo en el discurso al poder verbalizar esta relación, sin embargo difícilmente reconoce que la parte fraccionaria de un decimal se define en función de la unidad. Para superar esta dificultad se hizo uso del cuadro-unidad, el cual resultó muy útil para los estudiantes ya que les permitió visualizar de forma gráfica la relación de la parte fraccionaria de un número con la unidad y gracias a ello pudieron identificar equivalencias entre números de distintos órdenes (décimos, centésimos o milésimos).

Por lo anterior, sería recomendable que se implementara en las aulas el uso del cuadrado unitario como herramienta para mejorar el conocimiento de la relación de la parte fraccionaria con la unidad, en especial, porque ésta es una de las ideas básicas para que los estudiantes lleguen a la comprensión o reconocimiento de aspectos de mayor dificultad cognitiva como lo es la equivalencia o la comparación y el orden de los decimales. A lo largo de las sesiones trabajadas en la presente investigación, se observó que cuando los estudiantes tenían duda sobre el orden de dos o más decimales, recurrían a la representación gráfica de la parte decimal del número en el cuadrado unitario, y mediante la comparación de las superficies señaladas, determinaban cuál número era mayor o menor.

En relación a las distintas representaciones de los decimales, resultó evidente que en un primer momento los estudiantes consideraban que las formas para representar los decimales eran mediante su escritura con punto o escribiendo el nombre del número, por ejemplo: 0.75 y setenta y cinco centésimos; eran pocos los estudiantes que reconocían las fracciones decimales por ejemplo, $\frac{75}{100}$ como otra de las formas para expresarlos. Sin embargo, a lo largo de las sesiones se logró que los alumnos consideraran otro tipo de representaciones como lo son las fracciones decimales pero con denominadores distintos a 10, 100 o 1000, (por ejemplo: $\frac{3}{4}$, para el caso de 0.75), la representación mediante el área de una superficie fraccionada (utilizando el cuadrado unitario, pero incluyendo también figuras distintas divididas por ejemplo, en medios, cuartos, quintos, etc.) y la ubicación del punto que ocupa un decimal en la recta numérica.

Al presentar a los estudiantes una diversidad de representaciones para un decimal, se logró que ellos propusieran otro tipo de expresiones que no se habían considerado, pero que dieron muestra del avance en el nivel de comprensión de determinadas propiedades de los decimales. Algunas de estas formas fueron la descomposición del número según los distintos órdenes de agrupación $\frac{7}{10}+\frac{5}{100}$; la búsqueda de números equivalentes como $\frac{75}{100}\text{x}\,2=\frac{150}{200}$; o la introducción de la noción de potencias al mostrar expresiones como $0.75=0\text{ x }10+\frac{7}{10}+\frac{5}{100}$, idea que se muestra incompleta, pero que da pie a la introducción de nociones más complejas.

Identificamos que al solicitar a los alumnos encontrar el lugar que ocupaban ciertos decimales, el utilizar los segmentos de recta que se proporcionaron para tal fin y que estaban divididos en centésimos, generó confusiones cuando el segmento requerido para ubicar los decimales dados abarcaba más de una unidad, porque las divisiones ya marcadas impedían que los estudiantes delimitaran libremente la unidad, ya que las divisiones ya no correspondían a los décimos o centésimos. Esas confusiones se superaron cuando en las rectas se delimitaba sólo la unidad, al permitir a los estudiantes ubicar con mayor facilidad el lugar que ocupa un determinado número.

Se evidenció la dificultad que tienen los estudiantes para realizar particiones de la unidad distintas a los décimos, por ejemplo, se observó que al querer determinar el punto sobre la recta que ocupa un número como 0.75, la mayoría de los alumnos tienden a dividir la unidad en décimos y de ser necesario en centésimos, para encontrar la ubicación de 0.75. La minoría de los estudiantes reconocen que al dividir la unidad en cuartos, se podría encontrar de una manera más fácil, la ubicación para el número indicado. Esta dificultad probablemente sea más de carácter didáctico por la forma en que se presentan las actividades, que debida a la comprensión de los estudiantes.

De igual forma se logró que los estudiantes tuvieran un acercamiento a la noción de densidad a través del uso de la recta donde a partir de la localización de los decimales como puntos en la recta, los estudiantes identificaron que a pesar de que dos decimales aparentemente sean consecutivos, por ejemplo 4.2 y 4.3, es posible encontrar otros números entre ellos. La mayoría de los estudiantes hacen uso del cero para poder encontrar otros números decimales, es así como determinan que 4.2 es equivalente a 4.20 y que 4.3 lo es con 4.30, hallando entre éstos al 4.21, 4.22, 4.23, 4.24… 4.29, de igual forma, entre 4.27 y 4.28, localizan otros nueve números que corresponden al 4.271, 4.272, 4.273… 4.279, lo cual es identificado como densidad restringida. Es en este nivel donde se encuentra la mayoría de los alumnos, siendo pocos los estudiantes que utilizan la idea de que entre dos decimales dados, hay una gran cantidad de números decimales.

Los segmentos de recta fueron un instrumento sumamente útil para los estudiantes en la comprensión inicial de la noción de densidad, porque permitió visualizar que se puede tomar el segmento de la recta que sea necesario para encontrar otros decimales, sin embargo se debe tener cuidado al trabajar con rectas divididas previamente, ya que esas divisiones pueden generar confusiones en los alumnos.

En relación al cálculo y las operaciones se logró que los estudiantes reconocieran que al trabajar con decimales, las ideas de que la multiplicación siempre agranda al número y la división siempre lo achica, no siempre son válidas, ya que los números por los cuales se multiplica o entre los que se divide deben tener ciertas características para determinar si el resultado será mayor o menor que el número inicial. A los estudiantes les resultó complicado identificar estas particularidades y se dieron casos en los que extremaban las ideas y consideraban que las operaciones de multiplicación y división con decimales siempre funcionarían de manera contraria a cuando se opera con los naturales, es decir, creían que la multiplicación siempre achicaría el número y que la división siempre lo agrandaría. Es por ello que consideramos importante permitir que los estudiantes expresen sus comentarios o argumentos respecto a la forma de aplicar las operaciones, ya que son éstos los que permiten verificar el nivel de comprensión en el que se encuentran los estudiantes, dando oportunidad al profesor de retomar aspectos necesarios que ayuden a eliminar este tipo de ideas erróneas.

Durante el desarrollo de las distintas actividades que constituyeron el experimento de enseñanza, se propició el intercambio de ideas entre los alumnos, lo cual permitió la presentación de las diversas formas de resolución que utilizaron los estudiantes ya fuera organizados en equipos o de forma individual, generándose así discusiones en relación a los resultados obtenidos, pero sobre todo, permitiendo evidenciar los diferentes razonamientos que estaban formulando, los cuales en ocasiones eran correctos, otros incorrectos o confusos, pero que en general les daban la oportunidad de comparar sus razonamientos y argumentos con los de sus compañeros, identificar errores, corregir en los casos necesarios y reformular o complementar las ideas adquiridas.

A lo largo del desarrollo de las actividades contenidas en las diferentes sesiones de trabajo en el aula, tuvieron lugar otras dificultades que consideramos relacionadas con la operatividad, más que en relación al contenido abordado. Una de ellas consiste en la dificultad para realizar repartos equitativos (o equipartición) en las figuras utilizadas para representar la superficie que corresponde a un decimal, o al realizar particiones en la recta numérica para indicar el punto que ocupa un número, por lo anterior, consideramos que sería recomendable enfatizar aún más este aspecto en la enseñanza cotidiana en el aula.

La interpretación o reconocimiento de la unidad de referencia, es un aspecto de los decimales (y de las fracciones en general), que debe trabajarse con cuidado y detenimiento en una secuencia didáctica sobre estos números, ya que los estudiantes, dada la unidad pueden identificar con cierta facilidad un décimo o un centésimo, pero tienen mayor dificultad para identificar la unidad, dada una parte decimal, para lo cual es necesario que desarrollen el pensamiento reversible.

Otra dificultad encontrada está relacionada con los algoritmos, principalmente con el de la división, ya que algunos estudiantes confunden el orden entre el dividendo y el divisor, por ejemplo, si la división necesaria es 2 entre 4 (obteniendo 0.5), suelen realizar la división a la inversa, es decir, dividen 4 entre 2 (obteniendo 2), lo que los lleva a obtener resultados incorrectos. Esta dificultad se agudiza cuando el divisor es un número decimal, como al efectuar 2 entre 0.8, donde muestran confusiones con la ubicación del punto. En la multiplicación cometen errores al ordenar de forma incorrecta los resultados parciales, lo que deriva en la obtención de un resultado erróneo.

Finalmente, con los datos recabados a lo largo de la investigación, identificamos que el aprendizaje no es un proceso lineal, ya que en el caso de los números decimales, los estudiantes mostraron avances y retrocesos respecto a la comprensión de sus distintas propiedades. Por ejemplo, en la sesión donde se trabajaron las equivalencias entre los distintos órdenes de la parte fraccionaria de los números, los estudiantes habían mostrado haber comprendido con claridad las equivalencias entre décimos, centésimos y milésimos, todos en función de la unidad y,sin embargo, en las respuestas dadas en el cuestionario final, se observó que algunos estudiantes retrocedieron en el reconocimiento de dichas equivalencias, llegando a mencionar que un milésimo es mayor que un centésimo y un décimo y que por lo tanto, “no puede haber milésimos en los centésimos ni centésimos en los décimos”.

Al trabajar las distintas representaciones de los decimales también se observaron retrocesos ya que, en la sesión correspondiente, los estudiantes habían mostrado relacionar correctamente las expresiones con punto con: a) las fracciones decimales con denominadores 10, 100 y 1000;b) con las superficies fraccionadas y; c) con representaciones que ellos habían propuesto, tales como la descomposición aditiva del decimal (como suma).

Pero de estos aspectos que parecían superados, volvieron a mostrarse complejos para un buen número de estudiantes, según lo refejado en el cuestionario final.

Referencias Bibliográficas

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ávila, A. (2008a). *Los decimales: Más que una escritura. Reflexiones sobre su aprendizaje y enseñanza*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Ávila, A. (2008b). Los profesores y los decimales. Conocimientos y creencias acerca de un contenido de saber cuasi invisible. *Educación Matemática,* 20 (2), 5-33.

Ávila, A. (2013). Conocimientos en construcción sobre los números decimales: Los resultados de un acercamiento conceptual. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* 2013 (8), 29-59.

Brekke, G. (1996). A decimal number is a pair of whole numbers. In L.Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20 the PME International Conference,* 2, 137-144.

Broitman, C. Itzcovich, H y Quaranta M. (2003). La enseñanza de los números decimales: El análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 6 (1). 5-26.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* La pensée Sauvage, Grenoble.

Brousseau, G., Brousseau, N. y Warfield, V. (2007). Rationals and decimals as required in the school curriculum: Part 2: From Rationals to Decimals. *Journal of Mathematical Behavior*, 26(4), 281-300.

Brown M. (2004). Place value and decimals, In K. M. Hart (Ed.) *Children's Understanding of Mathematics: 11 - 16*. pp. 48-65. Eastbourne: Antony Rowe Publishing Service.

Castro, E. (2001), Números decimales. En Enrique Castro (Ed.). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 315-345). Madrid: Editorial Síntesis.

Centeno, J. (1997). *Números decimales ¿Por qué? ¿Para qué?.* Madrid: Editorial Síntesis.

Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A. A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in education research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13.

Confrey, J & Lachance A. (2000), Transformative Teaching. Experiments Through. Conjecture-Driven. Research Design. In A. Kelly & R. Lesh (Eds). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. LAE, Pub: London.

Cortina, J. (2014), Trayectoria hipotética de aprendizajes (HLT) en An alternative starting point for fraction instruction. (Por aparecer).

Fuglestad, A. B. (1996). Student´s misconceptions with decimal numbers – Preliminary results fron a study of computer basd teaching. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference,* 2, 369-376.

Gómez, B. (2010). Concepciones de los números decimales. *Revista de Investigación en Educación.* 2010 (8). 97-107.

Konic, P. Godino, J. Rivas M. (2010) Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas.* (74). 57-74.

Hannula, M. S. (2003). Locating fraction on a number line. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference,* 3, 7-24.

Hiebert, J. (1992). Mathematical, Cognitive, and Instructional Analyses of Decimal Fractions. In G. Leinhardt, R. Putman, R.A. Hattrup (Eds). *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching.* Lawrence Erlbaum Associtès, Pub. 283-322.

Peterson, J. & Hashisaki, J. (1996). *Teoría de la aritmética.* México: Limusa, Noriega Editores.

Resnick L. Nesher, P. Leonard, F. Magone, M. Omanson, S. & Peled, I. (1989). Conceptual Bases of Arithmetic Errors : The case of Decimal Fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*. 20 (1). 8-27.

Roditi, Éric. (2007). La comparaison des nombres décimaux, Conception et expérimentation d´une aide aux élèves en difficulté. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* 2007 (12). 55-81.

Saiz, I. Gorostegui, E. y Vilotta, D. (2011) Problematizar los conjuntos numéricos para repensar su enseñanza; entre las expresiones decimales y los números decimales. *Educación Matemática*, 23 (1). 123-151.

Secretaría de Educación Pública (2011a), *Plan de Estudios Educación Básica.* México. 1-92.

Secretaría de Educación Pública (2011b), *Programa de Estudio Guía para el maestro. Educación Básica. Primaria. Cuarto grado.* México. 57-78.

Secretaría de Educación Pública (2011c), *Programa de Estudio Guía para el maestro. Educación Básica. Primaria. Quinto grado.* México. 59-80.

Secretaría de Educación Pública (2011d), *Programa de Estudio Guía para el maestro. Educación Básica. Primaria. Sexto grado.* México. 59-79.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114–145.

Simon, M. & Tzur, R. (2004), Explicating the Role of Mathematical Task in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning,* 6 (2), 91-104.

Steinle, V., & Stacey, K. (2003). Grade-related trends in the prevalence and persistence of decimal misconceptions. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference,* 4, 259-266

Steinle, V., & Stacey, K. (2004). Persistence of decimal misconceptions and readiness to move to expertise. In M. J Holnes & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference,* 4, 225-232.

Van Galen, F. Feijs, E. Figueiredo, N. Gravemeijer, K. Van Herpen, E. Keijzer R. (2008) *Fractions, Percentages, Decimals and Proportions. A Learning-Teaching Trajectory for Grade 4, 5 and 6.* Netherlands: Sense Publishers.

Verschaffel, L. Greer, B & Torbeyns, J. (2006). Numerical Thinking. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future*. Sense Publishers. Rotterdam, Taipei. 51-82.

Wearne, D. & Hiebert, J. (1988). Constructing and Using Meaning for Mathematical Symbols: The Case of Decimal Franctions. In J. Hiebert & M. Behr (Eds). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades. (*2). Reston, Va: NCTM-LAE. 220-235.

Widjaja, W. Stacey, K & Steinle V. (2008), Misconceptions about Density of Decimals: Insights from Indonesian Pre-service Teachers. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia.* 31 (2), 117-131.

Anexos

ANEXO 1

Mapa Curricular de la Educación Básica 2011

Estándares Curriculares[1]	1er Periodo escolar	2° Periodo escolar		3er Periodo escolar	4° Periodo escolar
Campos de formación para la Educación Básica	Preescolar (1°, 2°, 3°)	Primaria 1°, 2°	Primaria 3°	Primaria 4°, 5°, 6°	Secundaria (1°, 2°, 3°)
Lenguaje y comunicación	Lenguaje y comunicación	Español			Español I, II y III
	Segunda Lengua: Inglés[2] (3°)	Segunda Lengua: Inglés[2]			Segunda Lengua: Inglés I, II y III[2]
Pensamiento matemático	Pensamiento matemático	Matemáticas			Matemáticas I, II y III
Exploración y comprensión del mundo natural y social	Exploración y conocimiento del mundo	Exploración de la Naturaleza y la Sociedad		Ciencias Naturales[3]	Ciencias I (énfasis en Biología); Ciencias II (énfasis en Física); Ciencias III (énfasis en Química)
	Desarrollo físico y salud		La Entidad donde Vivo		Tecnología I, II y III
				Geografía[3]	Geografía de México y del Mundo; Historia I y II
				Historia[3]	Asignatura Estatal
Desarrollo personal y para la convivencia	Desarrollo personal y social	Formación Cívica y Ética[4]			Formación Cívica y Ética I y II
					Tutoría
		Educación Física[4]			Educación Física I, II y III
	Expresión y apreciación artísticas	Educación Artística[4]			Artes I, II y III (Música, Danza, Teatro o Artes Visuales)
Habilidades Digitales					

¹ Estándares Curriculares de: Español, Matemáticas, Ciencias, Segunda Lengua: Inglés, y Habilidades Digitales.

² Para los alumnos hablantes de lengua indígena, el Español y el Inglés son consideradas como segundas lenguas a la materna. Inglés está en proceso de gestión.

³ Favorecen aprendizajes de Tecnología.

⁴ Establecen vínculos formativos con Ciencias Naturales, Geografía e Historia.

ANEXO 2

Resultados de enlace de la Escuela Oficial referida en la investigación[20].

MATEMÁTICAS

Porcentaje de Alumnos en cada nivel de logro por grado 2012/2011/2010*

		INSUFICIENTE			ELEMENTAL			BUENO			EXCELENTE		
		Escuela	Entidad	País	Escuela	Entidad	País	Escuela	Entidad	País	Escuela	Entidad	País
3°	2012	9.7%	3.6%	4.7%	54.8%	26.3%	28.3%	12.9%	31.1%	31.1%	22.6%	39.0%	35.9%
	2011	7.5%	4.9%	5.8%	35.0%	26.6%	27.8%	35.0%	34.6%	34.1%	22.5%	33.9%	32.4%
	2010	19.0%	5.3%	5.8%	23.8%	24.3%	25.5%	52.4%	40.1%	39.9%	4.8%	30.3%	28.8%
4°	2012	11.8%	3.7%	4.6%	35.3%	31.4%	31.7%	35.3%	36.9%	36.2%	17.6%	27.9%	27.5%
	2011	0.0%	4.9%	5.6%	36.8%	31.6%	32.4%	42.1%	38.1%	37.1%	21.1%	25.4%	24.9%
	2010	7.7%	5.6%	6.5%	53.8%	34.7%	35.8%	23.1%	40.2%	38.4%	15.4%	19.4%	19.4%
5°	2012	4.3%	4.4%	4.5%	47.8%	35.0%	35.8%	26.1%	33.8%	33.5%	21.7%	26.9%	26.1%
	2011	5.9%	4.4%	4.7%	52.9%	40.2%	40.7%	17.6%	37.6%	37.3%	23.5%	17.8%	17.3%
	2010	8.3%	5.5%	6.6%	66.7%	35.1%	35.6%	8.3%	41.1%	39.7%	16.7%	18.3%	18.1%
6°	2012	0.0%	4.4%	5.3%	37.5%	34.8%	36.2%	37.5%	36.9%	36.2%	25.0%	23.9%	22.3%
	2011	0.0%	4.9%	5.6%	50.0%	43.6%	44.2%	35.7%	34.3%	33.2%	14.3%	17.2%	17.0%
	2010	0.0%	3.0%	3.4%	78.9%	42.8%	43.8%	21.1%	40.6%	39.4%	0.0%	13.6%	13.4%

S/D: SIN DATOS

INSUFICIENTE	**Necesita adquirir los conocimientos y desarrollar las habilidades de la asignatura evaluada.**
ELEMENTAL	**Requiere fortalecer la mayoría de los conocimientos y desarrollar las habilidades de la asignatura evaluada.**
BUENO	**Muestra un nivel de dominio adecuado de los conocimientos y posee las habilidades de la asignatura evaluada.**
EXCELENTE	**Posee un alto nivel de dominio de los conocimientos y las habilidades de la asignatura evaluada.**

Puntaje promedio de los Alumnos por Grado 2012/2011/2010**

		ESCUELA	ENTIDAD	PAÍS
3°	2012	540	573	568
	2011	528	535	544
	2010	539	522	536
4°	2012	603	572	575
	2011	524	529	544
	2010	487	512	526
5°	2012	551	567	573
	2011	514	536	547
	2010	551	517	528
6°	2012	537	569	572
	2011	570	546	555
	2010	538	540	552

Porcentaje de Escuelas que se encuentran por debajo de mi Escuela por Grado-Asignatura 2012/2011/2010

		ENTIDAD	PAÍS
3°	2012	31.4	41.1
	2011	46.5	45.3
	2010	70.6	58.0
4°	2012	73.3	72.9
	2011	49.8	44.7
	2010	26.9	28.7
5°	2012	45.6	46.6
	2011	33.5	35.2
	2010	82.1	72.8
6°	2012	31.3	36.3
	2011	73.0	67.7
	2010	52.7	49.0

* Permite observar los resultados de los alumnos de mi escuela por porcentaje de nivel de logro, en cada grado, asignatura, tipo de escuela y grado de marginación de la localidad en relación con los resultados de los alumnos del mismo grado, asignatura, tipo de escuela y grado de marginación por entidad federativa y país.

** Permite observar los resultados de los alumnos de mi escuela por puntaje promedio, en cada grado, asignatura, tipo de escuela y grado de marginación de la localidad en relación con los resultados de los alumnos del mismo grado, asignatura, tipo de escuela y grado de marginación por entidad federativa y país.

Nota: 99.99% de los alumnos evaluados, se ubican en la escala de 200 a 800.

[20] [20] Tomado de http://201.175.44.203/Enlace/Resultados2012/Basica2012/R12CCTGeneral.aspx.

ANEXO 3

Cuestionario diagnóstico.

Escuela: ____________________ Fecha: __________

Nombre: ____________________ Grupo: __________

INDICACIONES: Lee atentamente las preguntas y contesta según consideres correcto, procura explicar lo más que puedas.

1. ¿Qué entiendes por décimo?

____

____

____.

2. ¿Qué entiendes por centésimo?

____

____

____.

3. ¿Qué entiendes por milésimo?

____

____

____.

4. ¿Qué tiene que ver la fracción $\frac{1}{2}$ con el número 0.5? ____________________

____

____.

5. Representa con un dibujo lo que se pide:

Un décimo	Un milésimo

Un entero	Un centésimo

6. Ordena las siguientes palabras de la que represente una cantidad mayor a la que represente la cantidad menor.

centésimo entero milésimo Décimo

_______________ _______________ _______________ _______________

7. Lee el nombre de las siguientes cantidades y escribe el número que les corresponda.

Cuarenta y cinco milésimos. _______________

Siete décimos. _______________

Tres milésimos. _______________

Dieciocho centésimos. _______________

Resuelve lo siguiente:

1. En la panadería de Don Fernando se hacen pasteles de diferentes tamaños y pesos. Si el precio de pastel depende de la cantidad de kilogramos que éste pese y Mariana compró un pastel de 9 kilos que le costó $852.50 pesos.
¿Cuál es el precio de cada kilo de pastel?

2. Inventa un problema que se pueda resolver con la siguiente operación: (Resuélvelo)
23.7 x 5.4

ANEXO 4

Cuestionario final.

Escuela: ______________________________ Fecha: ______________

Nombre: ______________________________ Grupo: ______________

INDICACIONES: Lee atentamente las preguntas y contesta según consideres correcto, procura explicar tus respuestas cuando se te pida.

1. De los siguientes números encierra los que sean números decimales y después contesta las preguntas

0.250	$\frac{1}{2}$	12.0	0.0002	$\frac{5}{7}$
1349	3.1416	$\frac{1}{1000}$	0.5	0.333333¯

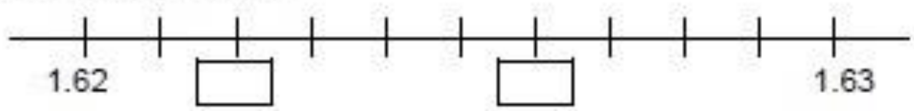
2. Escribe el antecesor y sucesor de los siguientes números, si es que los hay:

_____ 31 _______ _______ 1.75 _____ _______ 9.29 _______

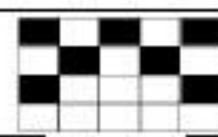
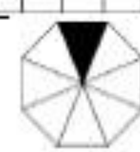
3. Escribe un número que vaya entre cada par de cifras y escríbelo en la línea de en medio.

3.28 _______ 3.29 1.5 _______ 1.6 0.2 ________ 0.3

4. Coloca los números que faltan.



6. Observa los números de la primera columna y únelos, trazando una línea, con su equivalente en la otra columna (si los hay).

0.125	
0.75	
0.3500	$\frac{6}{8}$

7. Ana quiere saber cuántos centésimos hay en 3 décimos. Ayúdale a encontrar la respuesta.________________________________.

8. Algunos niños dicen que un milésimo es mayor que un centésimo y que un centésimo es mayor que un décimo. Fíjate lo que respondieron:

"Los milésimos son más grandes porque están divididos en mil, ¡son mil partes!

¿Tú estás de acuerdo con los que dijeron esos niños? ________________________

¿Por qué? ________________________________

________________________________.

9. En una carrera atlética los corredores obtuvieron los siguientes tiempos:

Escribe cuánto representa la cifra subrayada en cada cantidad.

Corredor	Tiempo (minutos)	
Ernesto	13.12	Ejemplo: El 1 subrayado representa 1 décimo.
Alexis	13.07	________________
Enrique	13.187	________________
Manuel	13.2	________________

- Ordena los tiempos de menor a mayor.________________________
- ¿Quién ganó la carrera?________________________
- ¿Quién quedó en último lugar?________________________

10. Observa las cantidades que tenía Ana y lo que agregó a cada cantidad. Ayúdale a escribir los resultados. Puedes hacer operaciones al reverso de la hoja.

Tenía	Agregó	Resultado
5920	más 15 decenas	
62.152	más 4 centésimos	
14.70	más 5 décimos	

11. ¿Cuántos números puede haber entre 5.24 y 5.25?________________________

Explica tu respuesta________________________________

____

____

12. Observa los siguientes decimales y trata de escribir en la línea de abajo, la misma cantidad pero en fracción.

0.5 1.75 0.004

13. ¿Cuál es el resultado de dividir el número 24 entre 30? Encierra la respuesta que creas correcta.

a) No se puede dividir b) 0.8

c) 1.25 d) 2.8

Haz una operación para verificar tu respuesta

14. De cada par de operaciones, encierra la que consideres que dará el resultado mayor.

4 x 3	ó	4 ÷ 3
4 x 0.3	ó	4 ÷ 0.3

15. ¿Cuál de los siguientes números está "más lejos" del 14.41:

a) 14.41000 b) 14.411 c) 14.42

16. Para ti ¿Qué es un número decimal?______________________________________

____

____.

17. ¿Qué tiene que ver la fracción $\frac{3}{4}$ con el número 0.75?____________________________

____

____.

18. Lee el nombre de las siguientes cantidades y escribe el número que les corresponda.

Siete milésimos ____________________________

Veinte centésimos ____________________________

Diecinueve milésimos ____________________________

Nueve décimos ____________________________

Tres centésimos ____________________________

19. Resuelve el siguiente problema:
Para la fiesta de su hija, Doña Mari compró 25 kilos de pollo por los cuales pagó $887.50. ¿Cuál es el precio de cada kilo de pollo?

20. Inventa y resuelva un problema que se pueda resolver con la siguiente operación: 45.5 x 2.50